Association Mathématique du Québec

Énigmes et jeux mathématiques

Frédéric Gourdeau,
Université Laval

Nous débuterons avec les solutions des problèmes présentés dans la chronique de décembre 2009.

Problème 1 Dans le jeu suivant, on peut déplacer les pions (représentés par des X) en faisant sauter un pion par-dessus un autre (horizontalement ou verticalement) pour aller dans un espace vide (représenté par un O). En partant du jeu ci-dessous, quel est le nombre maximal d'espaces vides qu'on peut ainsi remplir ? Pourquoi ?

$$\begin{array}{cccccc}
X & X & X & X & X & O \\
X & X & X & X & O & O \\
X & X & X & O & O & O \\
X & X & O & O & O & O \\
X & O & O & O & O & O
\end{array}$$

Solution du problème 1 Lorsque l'on essaie de remplir les cases marquées par un O, on peut parvenir à toutes les remplir sauf trois. Je vous laisse voir comment : il y a plusieurs manières. Mais, et c'est là ce qui est intéressant, on ne parvient jamais à faire mieux. Le défi est de trouver pourquoi.

Dans un cas comme celui-ci, il est utile de considérer attentivement les caractéristiques des mouvements permis, à la recherche de caractéristiques intéressantes : une caractéristique est qu'un déplacement selon les règles résulte en un déplacement d'une seule pièce et ce, de deux cases. Il s'ensuit que seules les pièces indiquées par un **X** dans la figure ci-dessous peuvent se retrouver dans les trous indiqués par un **O** : il restera donc au moins trois de ces trous puisqu'on a 6 pièces et 9 trous.

$$\begin{array}{cccccc}
\cdot & \mathbf{X} & \cdot & \mathbf{X} & \cdot & \mathbf{O} \\
\mathbf{X} & \cdot & \mathbf{X} & \cdot & \mathbf{O} & \cdot \\
\cdot & \mathbf{X} & \cdot & \mathbf{O} & \cdot & \mathbf{O} \\
\mathbf{X} & \cdot & \mathbf{O} & \cdot & \mathbf{O} & \cdot \\
\cdot & \mathbf{O} & \cdot & \mathbf{O} & \cdot & \mathbf{O}
\end{array}$$

Un tel phénomène est plus facile à voir si on joue sur un échiquier, avec des cases noires et blanches. On peut aussi jouer avec des pions de deux couleurs (par exemple, des pièces de monnaie de 1 et 5 cents), disposées en alternance selon le même principe.

Problème 2 Pour deux nombres réels positifs x et y, lequel est le plus grand : x^y ou y^x ?

Solution du problème 2 Nous ne donnerons qu'une solution partielle, mais qui généralise cependant bien le problème à l'origine de celui-ci. Il suffit pour ce faire de séparer les variables. Puisque la fonction ln est strictement croissante et que x et y sont des réels positifs, on peut écrire :

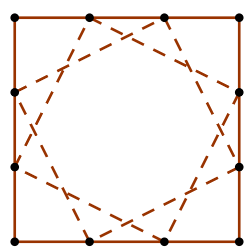
$$x^y > y^x \iff \ln(x^y) > \ln(y^x) \iff y \ln x > x \ln y \iff \frac{\ln x}{x} > \frac{\ln y}{y}.$$

On a donc à étudier la fonction $f(x) = \ln x/x$. Sa dérivée est nulle en $x = e$, qui est un maximum, et elle décroît de part et d'autre.

Problème 3 Une version de la question est : combien de carrés dont les quatre sommets sont des points à coordonnées entières (m, n), avec $0 \leq m \leq 8$ et $0 \leq n \leq 8$, peut-on former ?

Solution du problème 3 Il est facile de compter le nombre de carrés dont les côtés sont horizontaux. Il y a 1 carré de dimension 8 par 8, 2^2 carrés de dimension 7 par 7, ..., et 8^2 carrés de dimension 1 par 1 : de manière générale, il y a k^2 carrés de dimension $(9-k)$ par $(9-k)$, où $k = 1, 2, ..., 8$.

Pour les carrés dont les côtés ne sont ni horizontaux ni verticaux, il est utile de considérer un exemple. Dans chacun des 6^2 carrés 3 par 3, on peut inscrire deux autres carrés, tel qu'on le voit sur la figure suivante.



Donc, si on dénombre tous les carrés 3 par 3 ainsi que tous les carrés inscrits dans un carré 3 par 3, on aura 3×6^2 carrés. En faisant cela pour toutes les dimensions de carrés, on peut voir assez facilement qu'il y a

$$(8 \times 1^2) + (7 \times 2^2) + (6 \times 3^2) + (5 \times 4^2) + (4 \times 5^2) + (3 \times 6^2) + (2 \times 7^2) + (1 \times 8^2)$$

carrés, ce qui donne 540 carrés.

Si on veut donner une solution qui se généralise bien, on voit qu'ici, dans chacun des k^2 carrés de dimension $(9-k)$ par $(9-k)$, on peut inscrire $(9-k)-1$ carrés, et donc si on dénombre tous ces carrés, on en a $(9-k) \times k^2$ carrés. On arrive donc au nombre total de carrés $\sum_{k=1}^{8}(9-k)k^2$, ce qui est bien ce qu'on a écrit plus haut.

Maintenant, pour répondre à la question avec un nombre naturel N quelconque au lieu du 8 (i.e. avec $0 \leq m \leq N$ et $0 \leq n \leq N$), on aura $\sum_{k=1}^{N}((N+1)-k)k^2$ carrés. Il est utile de réécrire cette somme S ainsi :

$$S = \sum_{k=1}^{N}((N+1)-k)k^2 = (N+1)\sum_{k=1}^{N}k^2 - \sum_{k=1}^{N}k^3.$$

Ici, une connaissance de la valeur de la somme des carrés et de la somme des cubes est utile : on a $\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$ et $\sum_{k=1}^{N} k^3 = \left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2$. En remplaçant et en simplifiant, on obtient finalement exactement

$$S = \frac{N(N+1)^2(N+2)}{12},$$

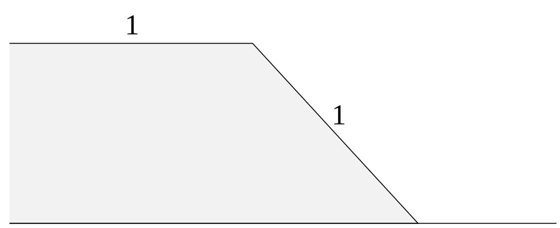
ce qui est rapide est simple à évaluer pour une valeur de N donnée (et donne bien 540 pour $N = 8$).

Nouveaux problèmes

1. PROBABILITÉ TRUQUÉE ? Un dé *honnête* (c'est-à-dire un dé tel que toute face a une probabilité $\frac{1}{6}$ d'être obtenue) est lancé jusqu'à ce que la somme totale des faces obtenues excède 12 pour la première fois.

   Quel est alors le total le plus probable de cette somme ?

2. AIRE MAXIMALE. On place dans le coin d'une pièce deux barrières d'un mètre de long chacune, tel que l'indique la figure ci-dessous.

   À quel endroit faut-il fixer les barrières sur chacun des murs de façon à maximiser l'aire de la région ainsi délimitée ?

3. PILE OU FACE. Pauline et Jean jouent à pile ou face. Pauline lance 6 fois la pièce de monnaie et Jean la lance 5 fois. Quelle est la probabilité que Pauline obtienne plus de fois “pile” que Jean ?

Une invitation

Il me fera plaisir de recevoir des suggestions de problèmes ou des solutions aux problèmes proposés. N'hésitez pas à m'écrire à Frederic.Gourdeau@mat.ulaval.ca.