Association Mathématique du Québec

Mathématiques et civilisation

En attendant Gödel ou Adieu, ma certitude...(2^e partie)

Claude Boucher,
Université de Sherbrooke

Résumé

Dans le dernier numéro du Bulletin, nous avons décrit certaines crises qui troublèrent les chercheurs, crises qui furent, fréquemment, provoquées par le maniement imprudent de concepts qui se rapportaient à l'infini : la découverte des nombres irrationnels par les pythagoriciens au VI^e siècle avant notre ère, les paradoxes provoqués aux XVII^e et XVIII^e siècles par l'étude des infinitésimaux et les séries infinies ainsi que l'apparition des géométries non euclidiennes au XIX^e. Nous reprenons l'histoire avec la crise des fondements.

4 La crise des fondements des mathématiques

C'est Léon Daudet, je crois, qui avait parlé du « stupide XIX^e siècle ». Ce jugement à l'emporte-pièce d'un pamphlétaire forcené de l'extrême droite glapissante est particulièrement injuste, quand on prétend l'appliquer à l'activité mathématique et scientifique de cette époque. En dépit des aboiements de monsieur Daudet, la caravane darwinienne a poursuivi sa route. Mais tenons-nous-en aux mathématiques. Ce siècle avait en ce domaine connu une fécondité et des progrès considérables. On y voit naître des théories nouvelles ou se développer et se raffermir des théories esquissées dans les siècles antérieurs. Le cas des géométries non euclidiennes que nous venons de citer n'en est qu'un parmi de nombreux exemples. On pourrait ajouter les théories des groupes, des idéaux et des corps, l'analyse combinatoire, l'analyse des variables réelles et complexes, la topologie, la logique mathématique, la théorie de l'information, la physique mathématique. Si longue qu'elle puisse paraître, cette liste est loin d'être exhaustive.

Face à cette prolifération, ce jaillissement, ce développement profus et parfois désordonné, il fallut un jour songer à quelque moyen de retrouver l'unité perdue de la science mathématique, d'en mieux assurer la cohérence et d'assujettir par un examen critique attentif les fondations de l'édifice tout entier. En créant la théorie des ensembles, Georges Cantor (1845 - 1918) s'attaqua à cette tâche immense, hérissée de difficultés imprévues, telles des ronces aux épines desquelles sa raison elle-même devait un jour se déchirer. Car cette entreprise allait le conduire au sein de territoires logiques inexplorés où l'attendaient, sans qu'il le soupçonnât, de virulentes antinomies. C'est ainsi que naquit, fruit de ses recherches, une crise de la pensée mathématique d'autant plus sévère et douloureuse qu'elle minait à sa base même une muraille qu'il avait cru dresser pour assurer à jamais la certitude des mathématiques. Nous sommes alors à l'orée du XX^{e} siècle. Les acquis du siècle précédent nous permettent de regarder l'avenir avec confiance. La fécondité des mathématiques apparaît comme le garant de leur cohérence. Et puis patatras, avec le tournant du siècle, une flopée de paradoxes, dont l'un est même issu des propres recherches de Cantor, éclosent soudainement dans la théorie des ensembles.

Pour le bénéfice des personnes qui liront ces lignes mais ne sont pas familières avec cette théorie, qu'on me permette d'en esquisser ici les rudiments. Intuitivement, on donne le nom d'*ensemble* à toute collection d'objets concrets ou abstraits. Les mathématiciens, cela va de soi, s'intéressent de manière particulière aux ensembles d'êtres mathématiques qui font l'objet de leurs recherches. Par exemple, on parlera de l'ensemble

$$\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

des entiers naturels, de l'ensemble des points d'une droite, et ainsi de suite. Il existe plusieurs façons de désigner un ensemble. L'une consiste, comme on le fait fréquemment en algèbre, à utiliser une lettre quelconque pour nommer cet ensemble. On peut aussi désigner un ensemble en donnant la liste des éléments qui le composent. Par exemple, $\{a, e, i, o, u, y\}$ et $\{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$ désigneront respectivement l'ensemble des voyelles de la langue française et l'ensemble des entiers naturels pairs. On dit alors que l'ensemble est défini par *extension.* Il va de soi que, dans le cas d'un ensemble infini, la liste ne saurait être énumérée de manière exhaustive.

Il existe une troisième façon de décrire un ensemble : on l'appelle *schéma de compréhension.* Ce schéma consiste à énoncer une propriété caractéristique des éléments dont cet ensemble est formé. Par exemple, l'ensemble P des entiers naturels pairs serait, en utilisant le schéma de compréhension, représenté par la formule suivante :

$$\{x | x \textit{ est divisible par } 2\},$$

où le symbole à gauche de la barre verticale désigne un élément générique de cet ensemble, tandis qu'on indique à droite la propriété qui caractérise cet élément générique. Ces propriétés caractéristiques, les logiciens leur donnent habituellement le nom de *prédicats.*

Une relation fondamentale de la théorie des ensembles se rapporte au concept d'*appartenance.* On dit qu'un être mathématique quelconque *appartient* (ou *n'appartient pas*) à un ensemble donné s'il est (ou n'est pas) un élément de cet ensemble. Ces relations d'appartenance ou de non-appartenance sont respectivement désignées par les symboles $\in$ ou $\notin$. Si P représente l'ensemble des entiers pairs, on écrira par exemple

$$18 \in P \textit{ et } 3/4 \ \notin P.$$

À côté de cette relation qui unit un objet à un ensemble, il en existe une autre qui relie les ensembles entre eux. Supposons que l'on ait deux ensembles quelconques A et B. On dira que A est un *sous-ensemble* de B (ce que l'on représentera par la notation $A \subseteq B$), si tout élément de A est aussi un élément de B. Par exemple, si V désigne l'ensemble des voyelles et A l'ensemble des lettres de l'alphabet, il est permis d'écrire $V \subseteq A$.

Pour n'importe quel ensemble A, on peut écrire $A \subseteq A$, puisque, comme l'aurait dit monsieur de La Palice, tout élément de A est... un élément de A. Donc tout ensemble est un sous-ensemble de lui-même. On trouvera cependant utile dans certains cas de parler de *sous-ensemble propre* d'un ensemble A pour désigner un sous-ensemble de A distinct de A. Si B est sous-ensemble propre de A, on écrira $B \subset A$ plutôt que $B \subseteq A$, si on désire mettre en évidence ce fait. Si les deux relations $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$ sont simultanément satisfaites, on conclura que les deux ensembles A et B possèdent les mêmes éléments, et on écrira $A = B$.

Parmi tous les ensembles qu'il est possible de concevoir, les mathématiciens trouvent commode d'admettre l'existence d'un ensemble caractérisé par le fait qu'il ne contient aucun élément. On l'appelle l'*ensemble vide* et on le désigne par le symbole $\emptyset$. Certains trouvent paradoxal que l'on admette l'existence d'un tel ensemble. En fait, le concept d'ensemble vide n'est pas plus paradoxal que le nombre 0 qui trouve sa place parmi les entiers naturels, ces nombres qui servent à faire le décompte des objets appartenant à un ensemble quelconque. Si, inspiré par une chanson de Juliette Gréco, on entend déterminer l'ensemble des fourmis de dix-huit mètres avec un chapeau sur la tête qui parlent latin et javanais, on sera bien forcé de conclure que cet ensemble n'est autre que l'ensemble vide.

Prenons un ensemble A quelconque. Il est aussi permis d'écrire que $\emptyset \subseteq A$, car tout élément de $\emptyset$ appartient par défaut à A, puisque $\emptyset$ ne contient aucun élément. Ainsi donc on admettra que l'ensemble $\emptyset$ est un sous-ensemble de n'importe quel ensemble. Si on appelle *cardinalité* d'un ensemble le nombre des éléments qui appartiennent à cet ensemble, on peut dire que la cardinalité de l'ensemble vide est égale à 0. On utilisera la notation $\mid E \mid$ pour désigner la cardinalité de l'ensemble E.

Supposons que l'on ait un ensemble $E = \{a, b, c\}$ formé de trois éléments. Dressons la liste de tous les sous-ensembles de E. On trouvera évidemment dans cette liste $\{a\}$, $\{b\}$ et $\{c\}$, les sous-ensembles de E formés d'un seul élément, ainsi que $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ et $\{b, c\}$, les sous-ensembles de E composés de deux éléments. Mais, en vertu de ce que nous avons dit ci-dessus, il existe deux autres sous-ensembles qu'il convient d'ajouter à cette liste : l'ensemble E tout entier et l'ensemble vide $\emptyset$. On désignera par $P(E)$ cet ensemble de tous les sous-ensembles de E.

L'ensemble E comptait trois éléments. L'ensemble $P(E)$ de ses sous-ensembles en compte 8, c'est-à-dire 2^3. Ce n'est pas un hasard. De manière générale, on pourrait démontrer que si la cardinalité de l'ensemble E est égale à n, la cardinalité de l'ensemble $P(E)$ serait égale à 2^n.

5 Les pièges de l'évidence

Les crises dans le progrès de la pensée et de la science viennent fréquemment de ce qu'on se laisse égarer par les pièges de l'évidence. Pour Cantor, il semblait aller de soi que l'on puisse associer à une propriété quelconque un ensemble qui serait formé de tous les objets qui possèdent cette propriété, autrement dit, il lui semblait évident que l'on pouvait, pour définir un ensemble, utiliser sans contraintes le schéma de compréhension. Nous allons voir que l'utilisation de ce schéma peut, s'il est fait inconsidérément, conduire à d'insolubles antinomies.

Quand nous avons défini ci-dessus le concept de sous-ensemble, nous avons vu que le nombre des sous-ensembles d'un ensemble de trois éléments était égal à 8. Donc, dans cet exemple, le nombre des éléments (autrement dit la cardinalité) de l'ensemble de tous les sous-ensembles de l'ensemble donné était *strictement supérieur* à celui de l'ensemble initial. Cantor avait démontré que cette propriété était vraie pour n'importe quel ensemble, indépendamment de sa cardinalité, qu'elle soit finie ou infinie. Ce théorème de Cantor peut être formulé ainsi : *pour tout ensemble S, la cardinalité de l'ensemble $P(S)$ des sous-ensembles d'un ensemble S est strictement supérieure à la cardinalité de l'ensemble S*. En disant que la cardinalité d'un ensemble est strictement supérieure à la cardinalité d'un second ensemble, on écarte la possibilité que ces cardinalités puissent être égales. Par exemple, l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est infini, mais l'ensemble $P(\mathbb{N})$ de tous les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ est un ensemble infini dont la cardinalité est strictement plus grande que celle de $\mathbb{N}$. Il existe donc, Cantor venait de le démontrer, des *infinis qui sont plus infinis que d'autres* !

Il est facile de tirer un premier paradoxe de ce théorème et du postulat voulant qu'il soit possible d'associer un ensemble à n'importe quel prédicat. Prenons comme propriété caractéristique *être un ensemble*, et posons

$$E = \{X | X \textit{ est un ensemble}\}.$$

E serait donc l'*ensemble de tous les ensembles*. Mais $P(E)$ est aussi un ensemble. C'est donc un élément de E, ce que l'on peut écrire $P(E) \in E$. Et puisque tout élément X de $P(E)$ est un ensemble, il s'ensuit aussi que $X \in E$. Donc $P(E) \subseteq E$. La cardinalité de $P(E)$ ne serait donc pas strictement supérieure à celle de E, ce qui contredit le théorème de Cantor.

L'étude qu'il avait faite du paradoxe de Cantor avait amené Bertrand Russell (1872 – 1970) — il sera tour à tour philosophe, mathématicien, moraliste et militant pacifiste — à concevoir un paradoxe que les personnes peu familières avec les mathématiques avancées auraient moins de peine à comprendre. En 1902, Russell en communiquera la teneur à Gottlob Frege (1848 – 1925), au moment où celui-ci s'apprêtait à publier le second tome d'un ouvrage intitulé *Grundgesetze der Arithmetik* (Les lois fondamentales de l'arithmétique). Frege s'était donné pour tâche de démontrer que l'ensemble des mathématiques était réductible à la logique, discipline qui apparaissait à beaucoup comme le garant ultime de la vérité. On donnera par la suite le nom de *logicisme* à l'école du XX$^{\text{e}}$ siècle qui s'inspirera de ce programme. Pour ce faire, Frege avait entrepris de mettre en œuvre son projet en s'attaquant d'abord à l'arithmétique, c'est-à-dire à l'étude des propriétés des entiers naturels, sur laquelle il espérait faire reposer par la suite l'étude des autres théories mathématiques.

Pour définir les entiers naturels, Frege avait allégrement fait appel au schéma de compréhension. Par exemple, pour lui, l'entier 2 était l'ensemble de *toutes* les paires d'objets, l'entier 3, l'ensemble de *tous* les trios, etc. Le paradoxe de Russell viendra montrer la fragilité de cet édifice. Ce paradoxe utilise le schéma de compréhension pour définir l'*ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes*. Expliquons. Si on considère l'ensemble des Chinois, on sait bien que cet ensemble est un concept abstrait et non pas un Chinois. Donc l'ensemble des Chinois n'est pas un élément de lui-même. En revanche, l'ensemble de tous les ensembles peut être considéré (imprudemment peut-être) comme un élément de lui-même. Désignons donc par M l'ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes. Conformément à la notation que nous avons introduite ci-dessus, nous pourrions écrire $M = \{X | X \notin X\}$.

Posons-nous la question suivante : M est-il, oui ou non, un élément de lui-même ? Autrement dit, est-ce que $M \in M$ ou est-ce que $M \notin M$? Si on suppose que $M \in M$, il faut conclure que l'ensemble M possède la propriété caractéristique de ses éléments, c'est-à-dire de ne pas être un élément d'eux-mêmes. On en déduit que $M \notin M$. Mais si, en revanche, on supposait que $M \notin M$, l'ensemble M posséderait la propriété caractéristique de ses éléments. Il faudrait conclure que $M \in M$. Autrement dit, l'ensemble M sera un élément de lui-même si et seulement s'il n'est pas un élément de lui-même !

En voulant faire porter ses raisonnements sur l'ensemble de tous les ensembles ayant une propriété donnée, le mathématicien risque fort de se retrouver avec des contradictions insurmontables. C'est ce dont Russell n'eut aucune peine à convaincre Frege, qui se résignera à écrire dans la conclusion de son ouvrage :

> Rien n'est aussi pénible pour un homme de science que de voir s'effondrer les fondements de ses travaux au moment même où il y met la dernière main. C'est la position dans laquelle je me suis retrouvé en recevant une note de M. Bertrand Russell alors que mon ouvrage allait sous presse.

Un adage nous rappelle qu'il ne faut pas jeter les bébés avec les eaux du bain. Il serait donc imprudent de conclure à partir de ces paradoxes que toute utilisation du schéma de compréhension est invalide. Ces constatations obligeaient néanmoins logiciens et mathématiciens à encadrer de prudentes balises l'usage de ce schéma. Nous verrons dans la suite de cet exposé les solutions qui seront proposées au cours des décennies qui suivront pour atteindre cet objectif et empêcher l'éclosion de pareils paradoxes. Mais, en dépit de sa confortable évidence, le schéma de compréhension était devenu une arme empoisonnée. Et horreur ! le ver était caché, non pas dans une province excentrique des mathématiques, mais au cœur d'une discipline — la logique — considérée comme fondamentale et dont Cantor et Frege avaient rêvé de tirer éventuellement la preuve de la cohérence de la totalité des sciences mathématiques. Voyant cela, des malins écriront : « La théorie des ensembles n'est plus une discipline stérile : elle engendre des paradoxes. » Et certains en viendront à conclure que « les générations à venir regarderont la théorie des ensembles comme une maladie dont on a fini par guérir ».

6 Y a-t-il un mathématicien dans la salle ?

Pourtant des écoles s'élaborent bientôt pour réparer les brèches ouvertes par ces paradoxes. Le concept d'ensemble, se dit-on, est essentiel, mais on l'a manié avec trop d'imprudence. Et il en est de même du schéma de compréhension. Ces concepts d'ensembles de tous les ensembles dotés d'une propriété donnée généraient des collections d'objets mal précisées qui recelaient le germe de toutes les contradictions. Ces diverses écoles, nous les grouperons sous quatre enseignes : le *logicisme*, dont la théorie des types de Russell représente la plus importante réalisation, l'*intuitionnisme* de Brouwer, le *formalisme* de Hilbert et enfin l'*axiomatisation* de la théorie des ensembles entreprise d'abord par Zermelo, puis à sa suite par divers autres mathématiciens.

6.1 Le logicisme

Nous avons dit que le logicisme est une tentative pour réduire les mathématiques à la logique. On pourrait, en poussant plus loin encore cette ambition, songer à réduire à la logique toute la pensée réflexive. On retrouve bien avant le XIX^{e} siècle des manifestations d'un tel programme, par exemple chez un philosophe et théologien catalan du nom de Raymond Lulle et chez le philosophe et mathématicien allemand Wilhelm Gottfried Leibniz.

Placé au carrefour des cultures chrétienne, arabe et juive, Raymond Lulle (1235 – 1315) — en catalan son nom s'écrit Ramon Llull — s'était donné pour tâche de convertir les musulmans au christianisme en recourant à la force de la raison ! Pour ce faire, il avait conçu en particulier dans son *Ars magna* (le Grand Art) le projet d'un langage basé sur une logique combinatoire, qui aurait constitué une clé universelle de la connaissance et un moyen infaillible de trancher toute discussion philosophique ou théologique. Dans son *Discours de la méthode*, René Descartes (1596 – 1650) dira de l'art de Lulle qu'il sert à parler sans jugement des choses que l'on ignore plutôt que de les apprendre. Et reprenant les propos méprisants de Descartes, dans *Émile ou De l'Éducation*, Jean-Jacques Rousseau dira de cet art qu'il se contente « de nous apprendre à babiller de ce qu'on ne sait point ».

Leibniz, nous l'avons mentionné précédemment, partage avec Newton l'honneur d'avoir créé le calcul différentiel et intégral. C'était un génial touche-à-tout qui s'illustra dans maints domaines de la pensée et de l'activité humaine, comme la philosophie et la théologie, le droit et la politique. Il avait conçu dans sa jeunesse le projet de créer un langage symbolique, qu'il avait appelé *caractéristique universelle*, applicable autant à la logique et à la philosophie qu'aux mathématiques et aux sciences de la nature, bref, à toutes les disciplines où l'on se mêle de raisonner et de discuter. Grâce à ce langage universel, espérait-il, les disputes entre philosophes se régleraient aussi simplement que les désaccords entre mathématiciens sont éclaircis par une vérification de leurs calculs et de leurs démonstrations. Dans son conte philosophique *Candide ou l'Optimisme* (1759), Voltaire attribue à Pangloss, l'ineffable précepteur de Candide, le rôle de défenseur de la pensée — travestie à des fins polémiques — de Leibniz. L'étymologie du nom *Pangloss* nous renvoie à une expression grecque qui signifie *Toute langue*. Il est facile de voir dans ce nom une malicieuse allusion à la caractéristique universelle.

Les ambitieux projets de Lulle et de Leibniz, par leur ampleur même, ne purent être menés à bien. Mais on trouve dans leurs œuvres les germes de recherches effectuées aux XIX^{e} et XX^{e} siècles par Boole, Cantor, Frege et leurs successeurs, afin de formaliser la logique, d'unifier les disciplines mathématiques et de leur conférer des assises logiques imprenables.

Inspiré par le programme de Leibniz, Frege avait en 1879 publié un traité intitulé *Begriffschrift*, titre que l'on pourrait rendre littéralement par *Écriture des concepts*. Il fut traduit en français sous le titre pompeux d'*Idéographie*. Mettant en évidence les ambiguïtés des langues naturelles, il proposait une méthode formelle de représentation et d'analyse des énoncés mathématiques, qu'il espérait pouvoir étendre à l'ensemble des domaines où intervient le discours raisonné. Ces recherches le menèrent à la rédaction des *Lois fondamentales de l'arithmétique* où, comme nous l'avons vu, il devait se heurter sans l'avoir soupçonné aux pièges cachés sous l'utilisation du schéma de compréhension. En dépit de cet échec et de l'indifférence que ses travaux rencontrèrent, il avait mis en place des concepts et des formalismes qui inspireront durant les décennies qui suivirent logiciens, mathématiciens et philosophes. Entre autres, Russell — dont nous parlerons plus longuement dans un instant —, Alfred North Whitehead, Ludwig Wittgenstein et les membres du Cercle de Vienne reprendront le flambeau qu'il avait allumé.

Parce qu'il avait mis le feu aux poudres, Russell se devait de réparer les pots cassés en reprenant les travaux de Frege, mais, cette fois, en mettant en place des garde-fous qui préviendraient les paradoxes que l'usage inconsidéré du schéma de compréhension avait fait naître. Il s'appuiera sur une réflexion fort juste de Henri Poincaré voulant que ces paradoxes résultaient de ce que, en définissant certains ensembles, on s'était rendu coupable d'une faute logique, qu'on pourrait appeler *circularité.* Cette faute provient du fait qu'en voulant définir un être mathématique on se réfère directement ou indirectement à l'objet que l'on veut définir. Les paradoxes de Cantor et de Russell sont apparus quand on a respectivement considéré l'ensemble de tous les ensembles et l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes comme éléments. Pour désigner ce mode de forfait intellectuel que maints penseurs ont un jour ou l'autre commis, les logiciens anglo-saxons ont créé l'expression de *bootstrap lifting.* C'est un procédé qui consiste à tenter de se soulever dans les airs en tirant sur ses propres courroies de bottes !

Pour éviter cet écueil, le remède que proposait Russell consistait à partager les ensembles en strates disjointes enchâssées les unes dans les autres. On a donné le nom de *théorie des types* à cette approche. On part d'objets initiaux, les *atomes*, susceptibles d'appartenir à des collections, mais qui ne peuvent pas être eux-mêmes des collections. On leur associe le type 0. Puis, on associe le type 1 à tout ensemble dont les éléments sont de type 0, le type 2 à tout ensemble dont les éléments sont de type 1, et ainsi de suite. On n'accepte alors de parler d'appartenance (ou de non-appartenance) d'un objet à un autre que si le type du second est immédiatement supérieur à celui du premier. Autrement, on considère toute affirmation ou négation d'appartenance comme dénuée de signification. Puisque l'on ne pourrait y écrire de façon légitime des relations comme $X \in X$ ou $X \notin X$, cette compartimentation des ensembles réussit effectivement à prévenir les paradoxes précédents. Ces précautions étant prises, il sera possible à Russell, à Whitehead et à leurs successeurs de sauver une part importante des travaux de Frege.

Mais d'autres paradoxes apparurent bientôt. Si les premiers étaient de nature proprement logique, les seconds furent appelés *paradoxes sémantiques.* Ils résultaient non plus d'un concept mathématique plus ou moins bien défini, celui d'ensemble, mais semblaient provenir de l'imprécision intrinsèque du langage, et frappaient au cœur même de l'instrument qui avait été conçu pour en régler l'analyse et le fonctionnement, c'est-à-dire la grammaire.

Ce type de paradoxes était connu dès l'Antiquité. Épiménide, un philosophe crétois qui vivait au VIe siècle avant notre ère, aurait déclaré : « Tout ce que disent les Crétois est un mensonge ». Ce qui rapproche Épiménide de Yogi Berra, le joueur vedette des Yankees de New York, à qui on attribue ce *yogiberrisme* : « Plus de la moitié des mensonges que l'on dit à mon sujet sont faux. » Mais ne nous laissons pas écarter de nos antiques moutons. Dans l'*Épître à Tite* (chapitre I, versets 12 et 13), dont la tradition voudrait qu'elle ait été rédigée par saint Paul, on peut lire un écho de cet aphorisme : « L'un d'entre eux, leur propre prophète, a dit : "Crétois : perpétuels menteurs, mauvaises bêtes, ventres paresseux." Ce témoignage est vrai. Aussi reprends-les vertement pour qu'ils conservent une foi saine. »

Malgré cette péremptoire affirmation, il y a pourtant lieu de se demander si la maxime d'Épiménide est aussi fondée que le croit l'auteur de l'épître à Tite. Car cette déclaration recèle un embarrassant paradoxe sémantique. Si on admet qu'elle est vraie, il faut conclure, puisque Épiménide était Crétois, qu'elle est un mensonge. Mais, en même temps, puisqu'elle est vraie, nous avons au moins un exemple où un Crétois dit la vérité, contrairement à ce qu'affirmait la déclaration du philosophe.

Deux siècles plus tard, un autre philosophe grec, nommé Eubulide de Milet, formulait un paradoxe qui s'énonçait comme suit : « La présente phrase est fausse. » Si l'on admet qu'elle est vraie, on en conclura qu'elle est fausse. Mais, en revanche, si on admet qu'elle est fausse, on devra conclure qu'elle est vraie.

Cet exemple, comme bien d'autres plus récents qui alimentaient le folklore des mathématiciens et des logiciens, convainquirent Russell que la théorie des types telle qu'il l'avait énoncée ne suffisait pas à endiguer les flots de cette envahissante maladie. C'est ainsi que naquit la *théorie des types ramifiée*, qui prendra le relais de la théorie des types simple que nous venons de décrire.

Cette théorie utilisera deux formes de stratification, l'une qui se rapporte aux types des objets considérés, l'autre se rapportant aux ordres introduits au sein des énoncés d'une théorie. En codifiant les règles qui régiront leur formation, la seconde forme introduit une hiérarchie des ordres d'énoncés qui permet d'éviter les paradoxes sémantiques. Car, à l'instar des paradoxes logiques, les paradoxes d'Épiménide et d'Eubulide proviennent d'une faute semblable : la circularité qui entache la référence d'un énoncé à son propre contenu. Par exemple, l'énoncé *Tout ce que disent les Crétois est un mensonge* serait placé par la théorie des types ramifiée dans un ordre différent de celui où se situaient les déclarations habituelles des Crétois, y compris celles d'Épiménide.

Ainsi prévient-on de tels paradoxes. Mais à quel prix ? Car cette nouvelle théorie entraîne une stratification des objets logiques, et par conséquent une stratification des êtres mathématiques. Les opérateurs de négation et d'implication, les quantificateurs universels (*pour tout x...*) et existentiels (*il existe un x tel que...*), les valeurs de vérité, des termes comme *définition, proposition, entier naturel* et *nombre cardinal*, etc. doivent être dissociés et répartis selon des niveaux différents. Les concepts de la logique et des mathématiques se dissolvent pour devenir des *faisceaux* de concepts. Et, à la place des notions intuitives de classe et d'ensemble que l'on trouvait chez Cantor, Russell introduit un *axiome de réductibilité* qui oblige à faire appel à une terminologie et à une notation qui sont tout sauf intuitives.

Cet axiome vient s'ajouter aux axiomes de la logique, sans que l'on ait montré comment il serait possible de le réduire à des propositions issues de ces axiomes. Il en est de même pour deux autres axiomes auxquels Russell et Whitehead feront appel : il s'agit de l'*axiome de l'infini* et de l'*axiome* *multiplicatif.* Le premier postule l'existence d'au moins un ensemble infini, tandis que l'autre affirme que le produit d'un ensemble quelconque d'ensembles non vides est un ensemble non vide. L'introduction de ces axiomes, si utiles qu'ils soient, mettait en péril le programme de l'école logiciste qui s'était proposé de réduire les mathématiques à la logique.

En s'attaquant à des difficultés qui ressortissaient aux mathématiques, à la logique, à la philosophie et à la linguistique, Russell et Whitehead ont poursuivi trop de lièvres à la fois. On en conclura que le programme logiciste (tout au moins sous sa forme pure et dure) s'est traduit par un échec et qu'il n'a pu être mené à son terme. La morale de cette histoire est la suivante : les mathématiques reposent évidemment sur des fondations logiques, mais leur contenu se situe au-delà de ces fondations et n'est pas réductible à celles-ci. Il n'en reste pas moins que ces travaux n'ont pas été vains, puisqu'ils furent les premiers à formuler une définition du concept d'entier naturel qui ne soit pas contradictoire, qu'ils élaborèrent l'approche contemporaine de la théorie des relations et, partant, celle des fonctions, et qu'ils mirent en place de nombreux concepts qui inspireront les recherches de Hilbert et de Gödel, pour ne nommer que ceux-là.

6.2 L'intuitionnisme

On trouve dans les œuvres de René Descartes (1596 - 1650), de Blaise Pascal (1623 - 1662) et d'Emmanuel Kant des réflexions qui inviteraient à en faire des ancêtres de l'intuitionnisme. Dans ses *Règles pour la direction de l'esprit* (1628), Descartes écrit :

> Nous allons énumérer ici tous les actes de notre entendement, par lesquels nous pouvons parvenir à la connaissance des choses sans crainte d'erreur ; il n'y en a que deux : l'intuition et la déduction. Par *intuition* j'entends, non pas le témoignage changeant des sens ou le jugement trompeur d'une imagination qui compose mal son objet, mais la conception d'un esprit pur et attentif, conception si facile et si distincte qu'aucun doute ne reste sur ce que nous comprenons ; ou, ce qui est la même chose, la conception d'un esprit ferme et attentif, qui naît de la seule lumière de la raison et qui, étant plus simple, est par la suite plus sûre que la déduction même, qui pourtant elle aussi ne peut pas être mal faite par l'homme, comme nous l'avons remarqué précédemment. *(Règle III)*

De son côté, Pascal écrivait dans *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader* (1658) :

> Quelque mouvement, quelque nombre, quelque espace, quelque temps que ce soit, il y a en a toujours un plus grand et un moindre [...]. Toutes ces vérités ne se peuvent démontrer, et cependant ce sont les fondements et les principes de la géométrie. Mais comme la cause qui les rend incapables de démonstration n'est pas leur obscurité mais au contraire leur extrême évidence, ce manque de preuve n'est pas un défaut, mais plutôt une perfection. D'où l'on voit que la géométrie ne peut définir les objets ni prouver les principes ; mais pour cette seule et avantageuse raison, que les uns et les autres sont dans une extrême clarté naturelle, qui convainc la raison plus puissamment que le discours. *(Section I)*

Dans sa *Critique de la raison pure* (la seconde édition est de 1787), Kant expose une thèse selon laquelle nos conceptions de l'espace et du temps sont des intuitions pures qui guident a priori l'esprit humain dans l'organisation des perceptions reçues par l'intermédiaire des sens. Mais, plus encore que ces vénérables prédécesseurs, c'est le mathématicien allemand Leopold Kronecker (1823 – 1881) qui orienta de manière décisive les idées de l'école intuitionniste. Kronecker, une vraie teigne, soit dit en passant, mettait en doute la validité des preuves d'existence, quand elles étaient incapables de fournir un moyen explicite soit pour construire les êtres mathématiques dont on prétendait avoir démontré l'existence, soit pour en déterminer la valeur.

On appelle *nombre algébrique* tout nombre qui peut être obtenu comme racine d'une équation à coefficients entiers et *nombre transcendant* tout nombre réel qui n'est pas algébrique. (Comprenons que la trancendance des mathématiciens n'a rien à voir avec celle des philosophes et des théologiens.) Cantor avait démontré que la cardinalité de l'ensemble des nombres transcendants était strictement supérieure à celle de l'ensemble des nombres algébriques, même si ce dernier ensemble comprenait une infinité d'éléments. Il avait, en étudiant la cardinalité des ensembles infinis, introduit une arithmétique nouvelle portant sur des nombres qui seront appelés *transfinis*. Pour Kronecker, ces travaux n'étaient pas des mathématiques, mais des élucubrations mystiques.

En 1882, Ferdinand Lindemann (1852 – 1939) avait établi que π appartient à cette classe des nombres réels trancendants. Mais sa preuve était de nature existentielle et ne fournissait pas un procédé explicite pour calculer la valeur de π. Kronecker lui fit la remarque : « À quoi sert un pareil travail, puisque de tels nombres irrationnels n'existent pas ? » En fait, Kronecker ne niait pas l'existence de tous les nombres irrationnels, mais seulement celle des nombres pour lesquels on ne possédait pas un moyen effectif d'en calculer la valeur. Ainsi admettait-il l'existence d'un nombre irrationnel comme

$$\sqrt{2}$$

pour lequel on connaît des processus arithmétiques bien définis permettant d'en calculer la valeur avec autant de précision qu'il nous plaira.

On peut certes, en faisant appel à des séries infinies, calculer la valeur de π avec autant de décimales que l'on veut, mais Kronecker refusait d'admettre la validité des raisonnements qui justifient le développement de ces séries. On devine jusqu'à quel point une telle position mettait en péril les résultats acquis en analyse mathématique à la fin du XIX^{e} siècle. Sans qu'il en portât officiellement le nom, on peut dire qu'avec Kronecker le mouvement intuitionniste était né.

Dans *Science et méthode* (1908), Henri Poincaré (1854 – 1912) résumera l'essentiel des critiques qu'il n'avait cessé de proférer à l'adresse des travaux de Cantor. Estimant qu'il était inutile de définir les entiers naturels et d'appuyer leurs propriétés sur une théorie axiomatisée, il s'attaquait aussi à Giuseppe Peano (1858 – 1932) qui avait élaboré une axiomatisation de l'arithmétique. Il reproche à ce dernier d'utiliser pour développer cette axiomatique un langage tarabiscoté — qu'il s'amuse à nommer le *péanien* — et une approche qu'il juge inutile, obscure, artificielle et, parfois même autoréférente et contradictoire. Il n'a pas de peine à se moquer aussi de Cesare Burali-Forti, un assistant de Peano, qui, dans un article intitulé *Una questione sui numeri transfiniti* (Une question sur les nombres transfinis) avait défini comme suit le nombre 1 :

$$1 = \iota T'\{Ko \cap (u, h) \in (u \in Un)\}.$$

« Voilà, commente malicieusement Poincaré, une définition du nombre 1 éminemment propre à donner une idée de ce nombre aux personnes qui n'en auraient jamais entendu parler. » C'est un direct dans les gencives des logicistes, et une jolie passe (au sens sportif du terme) en direction des intuitionnistes. Signalons que l'étude des nombres transfinis qu'avait faite Burali-Forti l'avait conduit à la formulation d'un paradoxe qui s'était ajouté à ceux dont nous avons précédemment parlé.

Dans la première décennie du XX^{e} siècle, de jeunes loups aussi prometteurs pour l'école mathématique française que René Baire, Émile Borel et Henri Lebesgue s'opposèrent farouchement à l'axiome du choix qu'Ernst Zermelo — nous en reparlerons — venait d'introduire dans son axiomatisation de la théorie des ensembles, parce que cet axiome n'indiquait aucun moyen effectif de construire l'ensemble dont il postulait l'existence. À ce titre, on peut affirmer qu'à l'instar de Poincaré ils appartinrent aux marges de l'intuitionnisme, puisqu'ils apportaient à leur tour, par ce refus, de l'eau au moulin de cette doctrine. Mais ils n'appartinrent jamais, à proprement parler, à cette école, d'autant plus, comme il apparaîtra par la suite, que des résultats importants obtenus par Borel et Lebesgue au moyen de méthodes classiques seront contestés par le courant intuitionniste officiel.

Mais ce ne sont là que les précurseurs de celui qui allait associer son nom de manière définitive à cette école de pensée : le Néerlandais Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881 – 1966). Sa thèse de doctorat, intitulée *Sur les fondements des mathématiques* (1907), inaugure une longue carrière tout entière consacrée à défendre la philosophie qui colore sa conception des mathématiques. On peut partager cette carrière en trois périodes. La première, qui suivit immédiatement sa soutenance de thèse, s'attaque vigoureusement aussi bien au logicisme de Russell qu'aux théories de Cantor et de Hilbert. La deuxième période, qui couvrira essentiellement les années '20, tente de reconstruire les principales théories mathématiques, notamment l'analyse, en tenant compte des exigences de l'intuitionnisme. Enfin, au cours des années '40, on le voit développer sa théorie du *sujet créatif*, qui radicalise, s'il se peut, ses positions initiales et se voudrait une théorie mathématique de la création mathématique. Si ces réflexions présentent quelque intérêt pour l'historien de la philosophie, elles en offrent bien peu aux mathématiciens mathématisants.

Pour Brouwer, les mathématiques sont une activité qui se situe dans l'esprit humain, qui n'a d'existence qu'en lui, et qui est donc tout à fait indépendante du monde réel. C'est une vue qui n'est pas tellement éloignée de la pensée platonicienne. L'esprit est, selon Brouwer, capable de percevoir de manière immédiate, *intuitive*, certaines vérités, notamment à propos des mathématiques, sans que n'intervienne l'expérience sensible. La connaissance des entiers naturels et de leurs propriétés appartiendrait à ce type de vérité. Kronecker, qui fut pour lui un maître à penser non avoué, n'avait-il pas écrit : « Dieu a créé les entiers naturels, alors que le reste est l'œuvre des hommes. » Selon Brouwer, la connaissance immédiate et spontanée des entiers naturels et de leurs propriétés s'appuie sur une intuition encore plus fondamentale : celle du temps à l'intérieur duquel le moment présent crée une dualité quand il établit un partage entre ce qui précède et ce qui suit. De cette intuition de la dualité naîtrait par dissociation celle d'unité. De la dualité associée à l'unité naîtrait la *trialité*, et ainsi de suite. C'est par un tel moyen, affirme Brouwer, que l'esprit humain appréhenderait successivement de manière intuitive chaque entier naturel.

Mais si chaque entier naturel peut être *construit* par un tel processus mental, cela n'entraîne pas, selon Brouwer, qu'il en soit de même pour l'ensemble des entiers naturels, car celui-ci n'admet l'infini que dans la mesure où il apparaît sous une forme potentielle. Comme quand on considère une variable qui *tend vers l'infini*, c'est-à-dire qui prend des valeurs aussi grandes que l'on veut. Il refuse de considérer comme ayant une existence valide un infini qui serait réalisé dans un hypothétique ensemble contenant la totalité des entiers naturels. On comprend bien qu'un tel point de vue était incapable de s'accommoder des travaux de Cantor aux antipodes desquels il se situait. On comprend aussi que cette approche impose de sévères contraintes à l'utilisation de certaines preuves par induction.

Du concept d'entier naturel, il est évidemment facile de passer à celui de nombre rationnel, puisque de tels nombres sont conçus comme le rapport de deux entiers naturels. Mais, en revanche, le passage aux nombres réels exige un saut herméneutique passablement plus vertigineux. L'approche de Brouwer sur ce point connaîtra des fluctuations. En un premier temps, il voudra voir dans le *continu* un objet immédiatement perçu par l'esprit, tout comme les entiers naturels. Plus tard, il introduira, pour appréhender les réels, le concept assez vaporeux de *suite de formation libre*, autrement dit, il voudra réduire le continu à des suites de nombres antérieurement définis.

L'un des aspects les plus troublants de la doctrine de Brouwer est la remise en question du *principe du tiers exclu*, qui, depuis l'Antiquité grecque, s'appliquait sans discussions aux divers champs où s'exerce la pensée réflexive. Rappelons que ce principe nous assure que tout énoncé A est ou bien vrai ou bien faux (auquel cas la négation de A est vraie), et qu'en dehors de ces deux-là il n'existe pas de troisième possibilité. Ce principe, bien entendu, ne doit pas être confondu avec le principe de contradiction selon lequel un énoncé ne peut pas être à la fois vrai et faux. Brouwer restreint radicalement les conditions dans lesquelles le principe du tiers exclu peut légitimement s'appliquer. Renoncer à ce principe, c'est en même temps renoncer aux preuves par l'absurde qui constituent une arme particulièrement efficace dans l'arsenal du mathématicien. Brouwer consent certes à reconnaître la validité du principe du tiers exclu dans certains cas particuliers, mais cette validité cesse, selon lui, dès que l'on prétend l'appliquer à des ensembles infinis.

Pour les intuitionnistes, la généralisation du principe du tiers exclu résulte d'une extrapolation imprudente qui repose sur le seul fait que ce principe n'a jamais été mis en défaut dans la vie de tous les jours, pour la bonne raison que la vie de tous les jours ne manie que des ensembles finis et discrets d'objets. Et c'est parce que l'on a voulu, disent-ils, appliquer ce principe à certains ensembles infinis que des paradoxes comme ceux de Cantor ou de Russell sont apparus. Il est vrai qu'en refusant d'admettre la validité du principe du tiers exclu quand il est appliqué à des objets infinis on ne peut plus voir apparaître de tels paradoxes. Mais le remède risque alors d'être encore plus détestable que le mal.

David Hilbert, dont nous parlerons tout à l'heure, écrivait en 1922 : « Faire des mathématiques en se privant du principe du tiers exclu, c'est comme, pour un boxeur, se présenter dans l'arène avec les bras attachés derrière le dos ou, pour un astronome, se priver de son télescope. » Et il ajoutait : « Les intuitionnistes cherchent à détruire et à défigurer les mathématiques. » C'étaient pour lui des ennemis publics numéro un.

Après avoir si radicalement critiqué les autres écoles mathématiques, avoir ébranlé la logique millénaire, avoir fait sombrer des pans entiers de disciplines aussi nobles et essentielles que l'analyse mathématique, Brouwer se devait de réparer, si c'était possible, une partie tout au moins des dommages qu'il avait causés. Il s'attela à cette tâche, au début avec autant d'enthousiasme qu'il en avait mis à mettre la pagaille dans l'univers mathématique, puis, on le sent bien, avec une lassitude croissante à mesure qu'il se rendait compte des difficultés dont son entreprise était hérissée.

En 1918, il propose sa propre version d'une théorie des ensembles (qui deviennent sous sa plume des *espèces*). En 1919, il apprête la théorie de la mesure à la sauce intuitionniste et, en 1923, c'est à la théorie des fonctions qu'il s'attaque — dans tous les sens que l'on voudra bien donner à ce verbe. Mais, chaque fois, les restrictions radicales qu'il s'est imposées l'obligent à chercher des preuves qui sont la plupart du temps horriblement tarabiscotées, et à déformer des notions consacrées et des résultats bien établis. Et tout cela sans qu'il parvienne à reconstruire de manière vraiment satisfaisante les édifices qu'il avait antérieurement démolis.

J'en veux pour exemple un théorème intuitionniste qui ne peut manquer de faire bondir tout mathématicien qui n'est pas un fervent disciple de cette école : *Toute fonction réelle est continue.* Il existe pourtant, on le sait bien, des fonctions réelles dites en escalier, comme celle qui est illustrée dans le diagramme que voici :

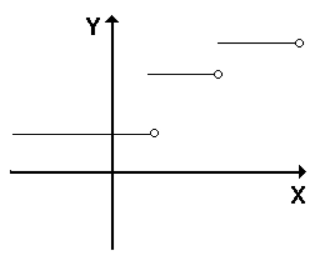

Fig. 7 – Fonction en escalier

Il est évident que cette fonction ne peut pas être continue. Comment Brouwer parvient-il alors à justifier son théorème ? Tout simplement en définissant les concepts de nombre réel, de fonction réelle et de fonction continue de telle sorte que le théorème devienne vrai pour de tels concepts. Mais on aura compris que ces définitions ressemblent fort peu à celles que l'on rencontre en analyse classique. À l'instar de Kronecker niant l'existence des nombres transcendants, les intuitionnistes pur sucre considéreront comme dénué de signification tout théorème des mathématiques classiques qu'il est imposssible de démontrer en respectant rigoureusement les interdits de leur école. Certes, il existe des théorèmes qu'il est possible de démontrer tout autant par des techniques classiques qu'intuitionnistes. Mais alors que, dans les cas classiques, les preuves sont habituellement simples, élégantes et concises, les démonstrations intuitionnistes sont tordues, brumeuses et interminables.

On ne sera donc pas étonné que le radicalisme agressif de Brouwer et le caractère obscur et discutable de ses théories aient attiré peu de disciples vers l'école intuitionniste.

Néanmoins, on concédera volontiers aux intuitionnistes qu'il est préférable, chaque fois que cela est possible, de posséder une preuve constructive plutôt qu'une preuve purement existentielle d'un énoncé mathématique. Mais il vaut mieux pourtant posséder une preuve existentielle que pas de preuve du tout. Et surtout les preuves constructives ne doivent pas être recherchées au prix d'un chambardement radical des concepts et des méthodes qu'utilisent des disciplines aussi bien fondées et fécondes, par exemple, que l'analyse mathématique. Bref, on peut compter l'intuitionnisme au rang de ces nombreux systèmes qui soulèvent d'excellentes questions, mais qui leur apportent dans la plupart des cas de bien mauvaises réponses.

À suivre dans le prochain Bulletin : Le formalisme, l'axiomatisation de la théorie des ensembles et... l'arrivée de Gödel.