

Concours de l'Association mathématique du Québec 2010

Ordre secondaire

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Le concours de l'Association mathématique du Québec vise à déceler les meilleurs talents mathématiques des écoles secondaires du Québec. Chaque question a la même valeur. Donnez des réponses complètes et détaillées. Les calculatrices sont interdites.

La correction prendra en compte divers éléments, dont l'exactitude de la réponse, la démarche, la clarté et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée. Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

1. Un nombre renversant

Un *alphanématique* est un petit casse-tête mathématique qui consiste en une équation où les chiffres sont remplacés par des lettres. Le résoudre consiste à trouver quelle lettre correspond à quel chiffre pour que l'équation soit vraie. Dans le problème, le même chiffre ne peut être représenté par deux lettres différentes et une lettre représente toujours le même chiffre. Bien entendu, un nombre ne doit jamais commencer par zéro. Par exemple, l'alphanématique $PAPA + PAPA = MAMAN$ a pour solution $P=7, A=5, M=1$ et $N=0$. Ainsi, en remplaçant les lettres par les chiffres, on a bien $7575 + 7575 = 15150$.

Trouvez la solution de l'alphanématique "renversant" suivant :

$$\text{NOMBRE} \times 3/5 = \text{ERBMON}.$$

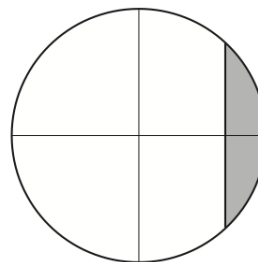
2. Le polynôme qui donne la migraine

Trouvez tous les polynômes de forme $p(x) = x^3 + mx + 6$ dont tous les zéros sont des nombres entiers.

3. Le cercle coupé

Une droite est située à $\sqrt{2}/2$ unités du centre d'un cercle de rayon 1, le séparant en deux parties. Quelle est l'aire de la plus petite partie ?

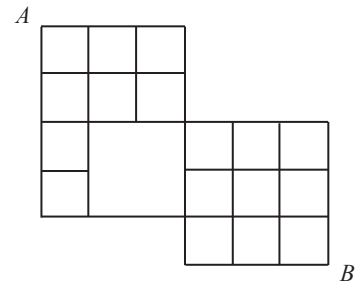
(Donnez la réponse sous la forme $A\pi + B$ où A et B sont des rationnels.)



4. La ville

La grille suivante représente le plan d'une ville. En partant du point A , combien y a-t-il de chemins (courts) distincts se rendant à B ?

(Un chemin court ne va jamais vers le haut de la grille ni vers la gauche.)



5. Que de zéros !

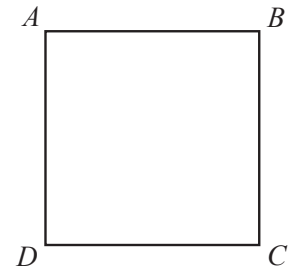
- Combien y a-t-il de zéros à la fin de $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 52$?
- Quel est le dernier chiffre (i.e. le plus à droite) non nul du développement décimal de $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 52$?

Par exemple, le dernier chiffre non nul de $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 12 = 479\,001\,600$ est 6.

6. Le jeu sur le carré

Juliette et Philippe jouent au jeu suivant. Au début de la partie, chaque coin d'un carré est recouvert d'un certain nombre de jetons. À tour de rôle, chaque joueur choisit un côté du carré et retire autant de jetons qu'il veut des deux coins qui limitent ce côté, pourvu qu'il en enlève en tout au moins un. Il n'est pas nécessaire de retirer le même nombre de jetons à chacun des coins. Le premier joueur qui se retrouve devant un carré dont tous les coins sont vides a perdu.

Au début de la partie, sur le carré ABCD, il y a 10 jetons sur le coin A, 11 sur le coin B, 12 sur le coin C et 13 sur le coin D. Si Juliette commence, comment devrait-elle jouer ?



7. Les fonctions mystérieuses

Quelles sont les fonctions $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $F(x) + xF(-x) = 1$, pour tout x réel ?