Énigmes et jeux mathématiques

Frédéric Gourdeau,
Département de mathématiques et de statistique,
Université Laval

Nous débuterons avec les solutions des problèmes présentés dans la chronique de mai 2009. Si vous ne retrouvez pas votre numéro du bulletin, il est disponible en ligne sur le site de l'AMQ.

L'automobile de Patrick

L'automobile de Patrick a une vitesse moyenne de 100 km/h pour les trois premières heures, et de 90 km/h pour les deux suivantes. Comme sa vitesse décroît de manière constante, elle roule à 100 km/h après 1h30, et à 90 km/h après 4 heures, ce qui indique que sa vitesse décroît de 4 km/h par heure. Elle roulera donc 84 km dans l'heure qui suit, et rendra l'âme dans 21h30.

Quadrillage du plan

On considère un quadrillé formé avec des droites horizontales et des droites verticales, et on cherche le nombre total de droites tracées s'il y a autant de régions rectangulaires que de régions illimitées. Il est assez clair que s'il n'y a que trois droites verticales, alors il y aura toujours trop de régions illimitées. Il en est de même pour trois droites horizontales : on a donc au moins quatre droites horizontales et au moins quatre droites verticales.

On peut alors considérer les régions illimitées en excès et trouver que les configurations possibles sont (4 et 11) ou (5 et 7). Il ne sert à rien de chercher plus longtemps, par symétrie. On a donc tracé 12 ou 15 droites.

On peut aussi y aller en posant des équations : pour m lignes horizontales et n lignes verticales, on a $(n-1)(m-1)$ rectangles et $2(n+m)$ régions illimitées. On obtient $(n-3)(m-3) = 8$, ce qui nous donne $n-3 = 1$, 2, 4 ou 8 : on retrouve les mêmes solutions.

Les trois nombres

On a $abc + def + ghi = 1575$ et on veut la somme $acb + dfe + gih$, où les neuf lettres représentent les neuf chiffres $1, 2, \ldots, 9$. Il est utile de remarquer que la somme minimale de trois chiffres différents est 6, que la somme maximale est 24, et que la somme des neuf chiffres est 45. On en conclut que $c + f + i = 15$ (car 5 et 25 ne sont pas possibles), que $b + e + h = 16$ (car $a + d + g \leq 15$ et, si $b + e + h = 6$, alors la somme des neuf chiffres ne peut donner 45) et donc que $a + d + g = 14$. La nouvelle somme obtenue sera donc 1566.

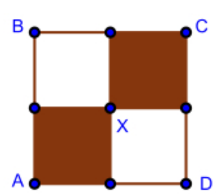
Sommons 2009

On cherche à maximiser le produit de nombres naturels dont la somme est 2009. Après quelques essais, on voit que l'on a intérêt à choisir des petits nombres, mais évidemment pas de 1. En effet, un 5 donne un moins grand produit que 2 et 3, de même pour un 6 qui donne un moins grand produit que 3 et 3. En général, un nombre $n \geq 5$ donne un moins grand produit que $n - 3$ et 3. On ne voudra donc prendre que des 2, des 3 et des 4. Comme un 4 donne le même produit que 2 et 2, on peut se contenter de 2 et de 3. Mais si on a trois 2, on a avantage à les remplacer par deux 3, puisque $2 \times 2 \times 2 < 3 \times 3$. Le produit maximal sera donc $2 \cdot 3^{669}$.

Une fonction extraordinaire

Rappelons l'énoncé, qui est simple : peut-on trouver une fonction f (à valeur réelle) définie sur le plan et qui est telle que pour tout carré $ABCD$, on a $f(A) + f(B) + f(C) + f(D) = 0$?

En fait, la seule fonction qui vérifie cela est la fonction nulle $f(P) = 0$ pour tout point P du plan. Voyons pourquoi. On considère un carré quelconque de sommets A, B, C et D que l'on subdivise en quatre carrés comme cela est fait sur la figure.



On applique alors l'identité aux deux petits carrés gris, on somme ces deux équations, puis on soustrait la même identité appliquée aux deux autres petits carrés. Cela nous donne, en divisant par 2, $f(A) - f(B) + f(C) - f(D) = 0$. En ajoutant $f(A) + f(B) + f(C) + f(D) = 0$ et en divisant par 2, on obtient $f(A) + f(C) = 0$. Cette dernière équation est vérifiée pour toute paire de points sur une diagonale, puisque le carré de départ est arbitraire.

Pour terminer, sur la figure, on a donc aussi $f(A) + f(X) = 0$ et $f(X) + f(C) = 0$. Si l'on soustrait cette dernière équation de la somme des deux autres, on obtient $f(A)+f(C)+f(A)+f(X)-f(X)-f(C) = 0$, ce qui nous donne $2f(A) = 0$. Comme le point A est quelconque, on a terminé. (Notons que l'on n'a utilisé que des carrés dont les côtés sont parallèles aux axes.)

Nouveaux problèmes

1. Dans le jeu suivant, on peut déplacer les pions (représentés par des X) en faisant sauter un pion par-dessus un autre (horizontalement ou verticalement) pour aller dans un espace vide (représenté par un O). En partant du jeu ci-dessous, quel est le nombre maximal d'espaces vides qu'on peut ainsi remplir ? Pourquoi ?

$$\begin{array}{cccccc} X & X & X & X & X & O \\ X & X & X & X & O & O \\ X & X & X & O & O & O \\ X & X & O & O & O & O \\ X & O & O & O & O & O \end{array}$$

2. Dans la foulée de **Sommons 2009**, pour deux nombres réels positifs x et y, lequel est le plus grand : x^y ou y^x ?

3. Parmi les problèmes de dénombrement accessibles, en voici un qui représente un beau défi : combien de carrés peut-on former sur un géoplan 8 par 8 ? Pour les lecteurs qui ne sont pas familiers avec le géoplan, on peut reformuler ainsi : combien de carrés dont les quatre sommets sont des points à coordonnées entières (m, n), avec $0 \leq m \leq 8$ et $0 \leq n \leq 8$, peut-on former ? Attention de bien considérer tous les carrés dont les côtés ne sont pas forcément parallèles aux axes. On voudra éventuellement pouvoir répondre pour une dimension quelconque de géoplan.