Les alphamétiques

Matthieu Dufour,
UQAM

Vers l'an 1900, l'auteur américain J. A H. Hunter a introduit le terme anglais « alphametic » (contraction de « alphabet » et « arithmetic ») pour désigner un certain type de casse-tête où chaque chiffre est représenté par une lettre unique dont on doit déterminer la valeur pour qu'une certaine équation soit vraie. Le problème revêt d'autant plus d'intérêt si les lettres forment des mots du langage courant, ce qui donne à l'ensemble un aspect plaisant. En français, ce type de casse-tête est désigné par « cryptarithme » mais la traduction assez naturelle « alphamétique » gagne en popularité à cause de sa simplicité. C'est donc ce terme que nous utiliserons dans cet article. L'alphamétique est le plus connu est peut-être

$$\mathbf{SEND + MORE = MONEY}$$

et il est dû à Dudeney.

Puisqu'il est d'usage de ne pas accepter les solutions où un nombre commencerait par 0, ce problème admet une solution unique : O=0, M=1, Y=2, E=5, N=6, D=7, R=8, et S=9.

Ainsi, l'équation devient, une fois les lettres transformées en chiffres,

$$\mathbf{9567 + 1085 = 10652}$$

et le lecteur peut vérifier qu'elle est vraie.

Un alphamétique n'admet pas toujours de solution, comme c'est le cas dans

$$\mathbf{AUCUNE \times 2 = SOLUTION}\,,$$

puisque la multiplication par 2 d'un nombre de six chiffres ne peut résulter en un nombre de huit chiffres. C'est aussi évidemment le cas quand il y a plus de dix lettres impliquées. Un alphamétique peut aussi admettre plusieurs solutions, comme par exemple

$$\mathbf{AB + CD = EF}\,,$$

dont les solutions sont tellement nombreuses (il y en a 476) que le problème est dépourvu d'intérêt.

Les alphamétiques intéressants, c'est-à-dire ceux qui admettent de préférence une solution unique, sont relativement rares, ce qui les rend d'autant plus précieux.

Nous tâcherons de montrer que, du primaire jusqu'au secondaire, les alphamétiques peuvent constituer un complément très intéressant à l'apprentissage des mathématiques. Tous les alphamétiques utilisés ci-après sont, à notre connaissance, inédits. À des fins pédagogiques, on peut les utiliser à deux niveaux.

Illustrons cela à partir d'un exemple simple que j'ai créé il y a longtemps pour mes enfants :

$$\mathbf{PAPA + PAPA = MAMAN}\,.$$

Sa solution, unique, est P = 7, A = 5, M = 1 et N = 0.

Le niveau 1 consiste à l'utiliser pour faciliter l'apprentissage des opérations de base. Il est particulièrement adapté pour les premières années du primaire.

Exemple de problème :

Avec la correspondance 0 = N, 1 = M, 2 = S, 3 = R, 4 = E, 5 = A, 6 = T, 7 = P, 8 = Z et enfin 9 = L, que vaut PAPA + PAPA ?

On a ici donné une valeur à des chiffres inutilisés, afin de ne pas rendre la solution trop évidente. L'élève doit transformer l'équation en chiffres : 7575 + 7575, effectuer le calcul, obtenir 15150, retransformer ce nombre en lettres et trouver « MAMAN » ; il sera alors tout content, car il saura que sa réponse sera forcément bonne, mais en revanche s'il trouvait plutôt WRXKTQACK, il aurait des raisons d'être dubitatif, d'autant plus que plusieurs lettres ne se trouvent pas dans la correspondance donnée initialement... Il va de soi que si on donne d'emblée la correspondance entre les chiffres et les lettres, tous les alphamétiques peuvent être utilisés de cette façon.

Le niveau 2 correspond à un problème de ce type :

Trouver la solution à l'alphamétique ***PAPA + PAPA = MAMAN*** .

Ce problème me semble particulièrement adapté à la fin du primaire, au secondaire et, pourquoi pas, à l'âge adulte si on ajoute au défi de trouver une solution la plus élégante possible. En effet, ici, puisqu'il n'y a que quatre lettres différentes, une recherche par essais et erreurs aboutit très vite à la solution. Cependant, il est beaucoup plus amusant de rechercher une « belle » solution, c'est-à-dire une solution où les valeurs de chacune des lettres découlent de déductions successives en évitant autant que faire se peut le morcellement du problème en vérifications fastidieuses de sous-cas : supposons que A = 1, que A = 2, et ainsi de suite. Voici une solution qui évite la décomposition en sous-cas, probablement la plus simple que l'on puisse trouver pour ce problème.

En réécrivant l'équation sous sa forme naturelle

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbf{P} & \mathbf{A} & \mathbf{P} & \mathbf{A} \\ + & \mathbf{P} & \mathbf{A} & \mathbf{P} & \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{M} & \mathbf{A} & \mathbf{M} & \mathbf{A} & \mathbf{N} \end{array}$$

nous désignerons les colonnes selon leur ordre de droite à gauche, la première correspondant aux unités, la seconde aux dizaines et ainsi de suite.

D'abord, M = 1, puisque si la somme de deux nombres de quatre chiffres résulte en un nombre de cinq chiffres, ce dernier ne peut commencer que par un 1. Ensuite, puisque A + A se termine par N dans la première colonne et par M dans la troisième colonne, cela ne s'explique que par l'existence d'une retenue issue de la 2e colonne. Cette retenue ne peut être que 1, et puisque M = 1, on a forcément N = 0. De la première colonne et du fait que la valeur de 0 ait déjà été attribuée à N, on déduit que A vaut 5, puisque c'est le seul chiffre autre que 0 dont le double se termine par 0. Toutes les lettres de MAMAN sont ainsi déterminées, et PAPA se trouve en divisant MAMAN, i.e. 15150 par deux, ce qui donne 7575, et on trouve ainsi P = 7, ce qui complète la solution.

Nous présenterons maintenant quelques autres alphamétiques composés au fil des ans.

L'alphamétique suivant demande une bonne dose de patience, car il implique une fraction. Il a le mérite de lier deux termes mathématiques (intégral comme dans « calcul différentiel et intégral ») où chaque terme est une anagramme de l'autre :

$$\text{INTEGRAL} \times 11/30 = \text{TRIANGLE}\,.$$

Sa solution est

$$42198570 \times 11/30 = 15472809\,.$$

Au primaire, je suggérerais donc le problème suivant, afin d'illustrer la multiplication par une fraction :

« En utilisant la correspondance

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
L	T	N	S	I	R	X	A	G	E

,

quel mot correspond à INTEGRAL × 11/30 ? » Le S et le X ont été ajoutés ici afin de remplir toutes les cases et de ne pas déstabiliser un élève.

Le problème suivant est un de mes favoris, car il donne lieu à un raisonnement fort élégant. Peut-être est-il trop avancé pour le primaire, car il a été conçu dans le cadre du concours de mathématiques du Québec de l'AMQ, version secondaire, et qu'il suppose la connaissance des critères de divisibilité d'un nombre par 3 et par 9, mais il me semble qu'une recherche par essais et erreurs est tout à fait à la portée d'un élève du deuxième cycle du primaire, et après tout, ne faut-il pas leur proposer parfois des problèmes plus difficiles ? Enfin, il est peut-être trop avancé pour qu'un bon étudiant trouve le raisonnement que nous allons présenter, mais certainement pas pour qu'il le comprenne. Jean Turgeon, Gilbert Labelle et moi-même, coauteurs du concours de l'AMQ, avions intitulé le problème « La limace malicieuse », pour des raisons évidentes étant donné l'alphamétique à résoudre et dont la solution est unique :

$$\text{LIMACE} \times 3 = \text{MALICE}\,.$$

Ce qui est remarquable ici, c'est que les lettres étant identiques, puisque MALICE et LIMACE sont anagrammes l'une de l'autre, on a pu poser la question supplémentaire suivante : « Montrer que s'il existe une solution, le nombre MALICE sera nécessairement divisible par 27. »

Cela se fait ainsi : MALICE est divisible par 3 puisqu'il est le triple de LIMACE. Donc la somme de ses chiffres est divisible par 3. Puisque LIMACE est composé des mêmes chiffres, mais dans un autre ordre, la somme de ses chiffres est la même et il est donc aussi divisible par 3. MALICE, étant le triple d'un nombre divisible par 3, est donc divisible par 9. Cela implique que la somme de ses chiffres est elle aussi divisible par 9, et donc LIMACE, pour la même raison, est aussi divisible par 9. MALICE, étant le triple d'un nombre divisible par 9, est alors forcément divisible par 27.

N'est-ce pas joli ? D'ailleurs, la solution de ce problème étant

$$123750 \times 3 = 371250\,,$$

on vérifie sans peine qu'effectivement, MALICE $= 371250 = 27 \times 13750$.

Pour ce qui est de la résolution de l'alphamétique, voici un aperçu d'une démarche possible : puisque les trois blocs MA, LI et CE sont fixes, on peut les considérer comme trois variables au lieu de six. Puisque CE $\times$ 3 se termine par CE, on a donc que CE $\times$ 2 se termine par 00, et donc CE $= 50$. L'équation LIMACE $\times$ 3 $=$ MALICE devient, en utilisant les blocs mentionnés,

$$(10000\text{ LI} + 100\text{ MA} + 50\ ) \times 3 = 10000\text{ MA} + 100\text{LI} + 50\,,$$

qui donne, après simplification et division par 100,

$$299\text{ LI} + 1 = 97\text{ MA}\,,$$

dont l'unique solution est LI $= 12$ et MA $= 37$.

Un autre alphamétique amusant a servi pour le concours de l'AMQ. Il provient d'une adaptation de l'alphamétique ABCDE $\times$ 4 $=$ EDCBA, glané dans un livre de Hunter, dont le nom a été mentionné au début de ce texte. Nous voulions l'adapter plaisamment en français et une fouille minutieuse dans le dictionnaire nous a donné ce que nous cherchions, deux mots composés de cinq lettres différentes qui s'obtiennent l'un de l'autre par inversion de leurs lettres. Le problème s'intitulait « Le nombre inversé d'Eliot Toile » (notez l'inversion des deux noms !) :

$$\text{ECART} \times 4 = \text{TRACE}\,.$$

Comme il n'y a que cinq lettres, on en vient rapidement à bout après un peu de tâtonnement, mais il existe une jolie solution qui évite presque complètement le recours aux essais et erreurs ; comme la place manque pour la donner ici, nous laissons au lecteur le plaisir de la chercher.

Si on ne veut inverser que quatre lettres, il y a deux façons de le faire.

D'abord, ABCD $\times$ 4 $=$ DCBA, qui ressemble beaucoup à la solution de l'alphamétique précédent, et une autre : ABCD $\times$ 9 $=$ DCBA, dont la solution $1089 \times 9 = 9801$ se généralise ainsi :

$$\begin{gathered}10989 \times 9 = 98901\\ 109989 \times 9 = 989901\\ 1099989 \times 9 = 9899901\,,\end{gathered}$$

et ainsi de suite.

Résultat remarquable, avec le premier résultat de la liste ci-haut : $10989 \times 2 = 21978$, qui est précisément la solution du premier mot de l'alphamétique

$$\text{ECART} \times 4 = \text{TRACE}\,.$$

En effet, $21798 \times 4 = 87912$!

Ce dernier résultat se généralise en augmentant à volonté le nombre de 9 consécutifs :

$$21978 \times 4 = 87912$$
$$219978 \times 4 = 879912$$
$$2199978 \times 4 = 8799912, \text{etc}\,.$$

La démonstration de ces deux séquences constitue un joli problème d'algèbre élémentaire accessible à tout bon élève du deuxième cycle du secondaire.

Comme il est possible de trouver plusieurs exemples d'alphamétiques sur Internet, nous nous contentons ici d'en suggérer quelques-uns que l'auteur de cet article a créés au fil des ans et qui sont donc, à notre connaissance, originaux. Leurs solutions se trouvent entre parenthèses. Puissent-il amuser les élèves et leurs enseignants !

1. CINQ $\times$ SIX = TRENTE   ($5409 \times 142 = 768078$)
2. . La plus longue inversion que l'auteur a été capable de faire, avec neuf chiffres différents :
   ABCDEFGHI $\times$ 4/7 = IHGFEDCBA   ($258306741 \times 4/7 = 147603852$)
3. Deux permutations de lettres amusantes. Comme n'ai pas encore trouvé de mots français qui rendraient le problème beaucoup plus joli (du type ECART $\times$ 4 = TRACE), je serais ravi si un lecteur m'en suggérait :
   ABCD $\times$ 3 = CBAD   ($2475 \times 3 = 7425$)
   ABCD $\times$ 3 = DCAB   ($1035 \times 3 = 3105$)
4. Petit problème composé dans la semaine suivant les élections américaines en novembre 2008 :
   OBAMA $\times$ 8 = BARACK   ($97858 \times 8 = 782864$)
5. Tout ou presque peut être l'objet d'un alphamétique, ainsi :
   PAPIER + PAPIER + PAPIER + REIPAP = CRAYONS
   (REIPAP est le mot « PAPIER » inversé. Solution : 0123456789 = YSCEORPANI).
6. Une jolie structure :
   A + BCC + DEEE + FGGGG + HIIII = ABCDEF
   (Solution : $9 + 122 + 5777 + 40000 + 866666 = 912574$)
7. Une autre jolie structure :
   A + AB + ABC + ABCD + ABCDE = FGHIJF
   (Solution : $9 + 94 + 947 + 9473 + 94738 = 105261$)
8. Enfin, pour terminer, ce petit problème :
   « Avec la correspondance

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
L	A	C	R	U	E	F	S	H	T

   quel est le résultat de CALCULS $\times$ 17 ? »
   Nous laissons au lecteur le plaisir de le trouver ...