Mathématiques en mouvement[1] : les lieux géométriques

Robert Bilinski,
Cégep Montmorency

Résumé

Dans ce texte, destiné aux professeurs et aux conseillers pédagogiques du primaire, on fait « faire » de la géométrie en faisant se déplacer des objets ou des enfants. L'observation de ces déplacements nous montre la notion de lieu géométrique. Nous présenterons à cette occasion des lieux géométriques particuliers, simples ou plus complexes, et des activités à faire au gymnase ou dans la cour d'école, pour que les enfants aient l'occasion, en se déplaçant suite à des instructions simples du professeur, de former par leurs positions ces lieux géométriques et de les découvrir. Nous proposerons ensuite des activités à faire en classe avec papier et crayon, dont le but est de représenter la réalité que les enfants viennent de vivre, afin de consolider les acquis et de favoriser l'installation de ces connaissances dans leur esprit.

1 L'objet « lieu géométrique »

La géométrie est l'étude des figures géométriques.
Une figure est constituée de points.
Une façon de définir certaines figures particulières est d'énoncer une propriété qui caractérise les points de cette figure. Il faut que tous les points qui vérifient la propriété fassent partie de la figure et, réciproquement, que seuls les points vérifiant cette propriété soient sur la figure.

On dit que la propriété « caractérise » la figure et que la figure est le « lieu géométrique » des points qui vérifient la propriété.

Ça semble compliqué, direz-vous. Oui . . . et non. Et cette manière d'aborder des problèmes est utile, car de nombreux problèmes de la vie courante sont définis par des contraintes du type : « Il faut construire les poteaux à tel et tel endroits pour que. . . », « Il faut placer les danseurs là et là pour que. . . », « Il faut placer les sièges pour que. . . » qui ont une solution mathématique utilisant les lieux géométriques.

[1] Cet article porte sur le même thème que l'atelier 117 du congrès 2008 de l'AQEP tenu à Québec.

© Association mathématique du Québec

2 Des objets « lieux géométriques »

a) Lieu géométrique tout petit

Il y a des lieux géométriques très simples. Par exemple, le lieu géométrique des points situés sur un segment et à la même distance des deux extrémités du segment est constitué par un point et un seul : le milieu du segment. Il n'existe qu'un seul point qui vérifie la propriété caractéristique : c'est un cas limite. Mais la définition ne dit pas qu'il faut plusieurs points pour constituer un lieu géométrique.

b) Lieu géométrique moyen

Il y a aussi des lieux géométriques plus compliqués. Par exemple, prenez une bicyclette et déposez-la à l'envers, reposant sur le guidon et la selle.

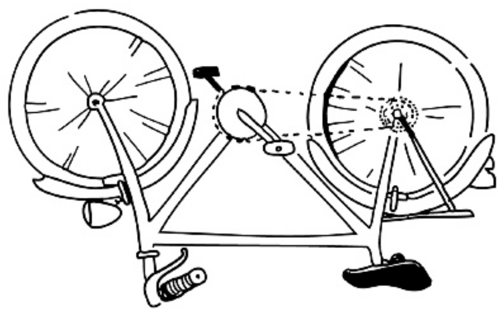

Figure 1. Une bicyclette reposant sur le guidon et la selle

Faites une marque de peinture rouge sur un des points de la circonférence de la roue arrière. Et maintenant, tournez doucement une des pédales ! Le point rouge bouge, évidemment. Quel est le lieu géométrique de toutes les positions successives de ce point ? C'est un cercle, centré sur l'essieu et de rayon égal à la longueur de ce qui s'appelle justement les rayons de la roue.

c) Lieu géométrique physiquement simple à produire par un enfant de 3 ans

Retournez votre bicyclette, montez dessus et roulez ! Pas trop vite, pour qu'on puisse observer le point rouge.

Le point rouge bouge, évidemment. Et la bicyclette aussi.

La figure suivante représente le lieu géométrique du point rouge. On appelle cette courbe une « cycloïde ».

C'est le lieu géométrique décrit par un point M d'un cercle roulant sans glisser sur une droite. La droite est appelée « directrice » et le cercle « cercle générateur ».

Ce lieu géométrique est assez sophistiqué et il faut presque regarder la roue avancer au ralenti pour se convaincre de la nature du lieu géométrique.

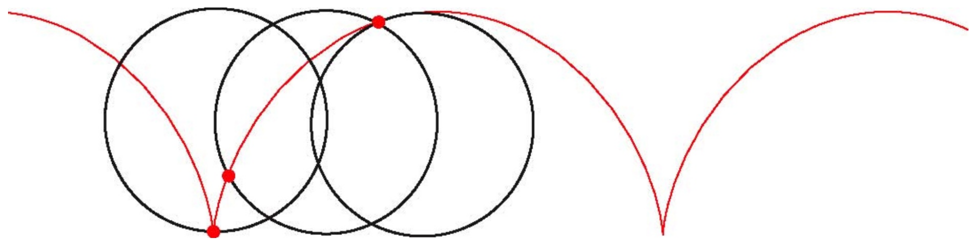

Figure 2. Une cycloïde

Pour se convaincre, il suffit de consulter la troisième photo du site : http ://cyril.almeras.free.fr/evt/2006/03_vtt_neige_nuit_greoliere/Top.html.
La lumière installée sur la roue de vélo était rouge. La trace rouge, visible sur la photo, est le lieu géométrique de la lumière rouge en déplacement. On obtient d'autres représentations en consultant Google sous « cycloïde ».

Il existe donc des lieux très simples et d'autres plus compliqués. Ce n'est pas juste un jeu abstrait dénué d'application. Ainsi, c'est avec la notion de lieu géométrique et quelques autres outils mathématiques (modélisation, calcul intégral et méthodes numériques) que les ingénieurs décident de la forme à donner aux rampes d'accès des autoroutes. La courbe mathématique décrivant ce lieu géométrique s'appelle clothoïde (voir figure 3, l'image est tirée de la page Wikipédia sur les clothoïdes).

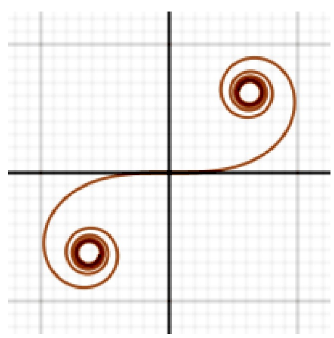

Figure 3. Une clothoïde

3 Les mathématiques en mouvement : La première activité

Situons-nous entre le très simple et le très compliqué.

Notre première activité :
Des enfants (points mobiles) dans un gymnase ou dans la cour d'école et des cordes à sauter (toutes de la même longueur, elles serviront à mesurer).
Une règle du jeu :
Albert et Béatrice (A et B deux points fixes) devront choisir leur position et n'en plus bouger.

Marie (un des points mobiles), peux-tu te placer « plus près de A que ne l'est B » (voir figures 4a et 4b) ? Utilisez les cordes à sauter pour mesurer les distances et vous assurer que Marie est placée comme le demande la règle.

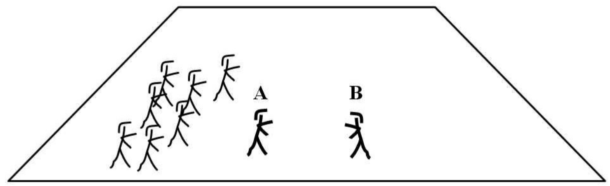

Figure 4a. Albert et Béatrice

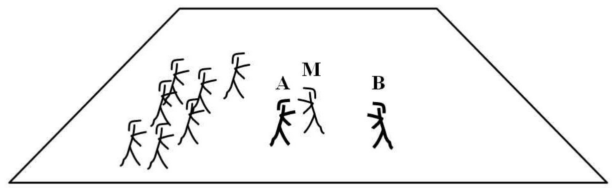

Figure 4b. Marie plus près de Albert que ne l'est Béatrice

Recommencer avec la règle « Marie, peux-tu te placer à la même distance de A que l'est B ? » (voir figure 4c). Encore là, utilisez les cordes à sauter pour mesurer les distances et vous assurer que Marie est placée comme le demande la règle.

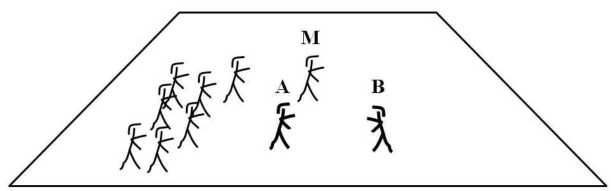

Figure 4c. Marie à la même distance de Albert que l'est Béatrice

Les enfants sont impatients d'essayer ? Allons-y. Pouvez-vous vous placer tous à la même distance de A que l'est B ? Il faut faire de multiples et sérieuses vérifications.
Et quand tout le monde est bien placé, maintenant, on ne bouge plus[2]. On peut aussi faire une marque de craie à l'endroit où est situé chaque enfant.

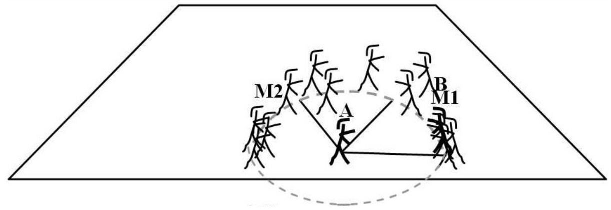

Figure 4d. La classe s'y met

[2]Vous pouvez prendre une photo des enfants vus d'assez haut.

Pour réaliser cette activité, il est préférable de faire entrer les enfants dans le jeu progressivement pour qu'ils se placent l'un après l'autre « aussi près de A que B ». Le premier essayera de se mettre de l'autre côté de A ou de coller B le plus possible... Mais cela ne sera pas possible pour tous. Après que 2 ou 3 enfants aient réussi à se placer, demander au reste de la classe de le faire. La variété des stimulus (voir les autres, se placer, discuter avec son voisin...) rend l'activité plus riche. Et le contrôle en début permet une meilleure gestion de classe : les élèves ayant un but, lorsqu'ils sont laissés à eux-mêmes, ils travaillent pour l'atteindre.

Question : quelle est la figure constituée par l'ensemble des positions des enfants de la classe ?
La situation dont nous parlons ici est semblable à celle de la roue arrière de la bicyclette renversée. Un point fixe : dans un cas l'essieu et dans l'autre Albert. Une distance fixe : dans un cas, la longueur des rayons de la roue, dans l'autre la distance entre Albert et Béatrice. Nous avons deux situations de lieux géométriques dont le lieu est un cercle[3].

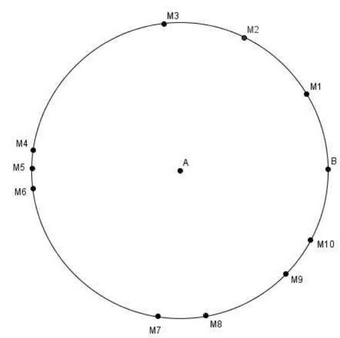

Figure 4e. La situation vue par l'œil du géomètre

Gageons que les enfants en classe qui n'ont pas assisté à cet atelier devront réfléchir un peu plus... ou un peu moins, car ils voient (ou vivent) la figure, mais de toute façon, ils trouveront qu'ils sont placés en cercle. On peut alors en profiter pour parler de la règle du jeu et de la figure qu'elle caractérise :

> Un cercle est le lieu géométrique de tous les points situés à une distance donnée, appelée rayon, d'un point fixe appelé centre.

Et voilà maintenant une occasion à ne pas manquer de parler de géométrie :
Comment peut-on se servir de ce que l'on a appris pour tracer un cercle ? Avons-nous un outil de géométrie (on appelle ça un instrument) qui fonctionne exactement sur le principe de ce jeu ?

Acceptons de nouveau que c'est trop facile, car nous avons déjà joué avec le compas de notre grand frère ou de notre cousine et beaucoup d'enfants l'ont déjà fait, eux aussi. Mais disons que c'est subtil et qu'on pourrait amener les enfants à imaginer cet instrument.

Si l'on souhaite que les élèves se souviennent de cette activité autrement qu'en pensant au brouhaha

[3]Apprendre à reconnaître la similitude entre deux situations, c'est isoler la notion (ici celle de cercle comme lieu géométrique) du contexte dans lequel elle est présentée. C'est « abstraire », c'est comprendre.

qui régnait dans le gymnase, on peut revenir en classe sur cette situation avec papier, crayon et règle graduée[4].

Une représentation de la situation devra faire apparaître deux points fixes, A et B et plusieurs positions possibles du point mobile M, soit M_1, M_2, M_3, etc. La vérification de la bonne position des différents points M_1, M_2, M_3 se fera curieusement assez bien avec un compas, et l'enfant qui le fait de cette façon ne triche pas, il intègre ses connaissances.

Il est important d'introduire le bon vocabulaire, le centre du cercle ne s'appelle pas le milieu, le cercle ne s'appelle pas le rond ni le disque, le contour s'appelle circonférence et le rayon s'appelle le rayon. Il est possible qu'il y ait une ambiguïté sur le mot « rayon » chez les enfants ; il peut être à la fois l'objet mathématique (un segment allant du centre à un point de la circonférence du cercle) et sa longueur (un nombre).

Cette activité a des bénéfices inattendus. Ainsi, il est facile d'évaluer qui se place bien et qui ne le fait pas, et cela rend la rétroaction et le renforcement possibles. Avec un climat de confiance, la rétroaction ne viendra pas que de vous. Les enfants voudront s'entraider et s'expliqueront le problème l'un à l'autre. À la fin de l'activité, tous les enfants seront placés sur le cercle, mais certains ne sauront pas trop pourquoi, d'où la nécessité de faire les activités de rétroaction présentées en annexe. De plus, les enfants sont actifs dans leurs apprentissages des notions. Il est important de noter que le mot actif signifie « actif mentalement » comme dans un cours habituel de mathématiques, mais aussi « actif physiquement », ce qui est plus rare. Enfin, l'activité ne se fait pas sans difficulté, car certains enfants ne maîtrisent pas des instructions comme « approche-toi », « plus près », « plus loin »... et c'est une occasion de les réviser.

4 Les mathématiques en mouvement : La seconde activité

Voici du nouveau.
Notre seconde activité :
Nous sommes de nouveau au gymnase avec des points mobiles et des cordes à mesurer (les enfants et des cordes à sauter).
On change d'enfants fixes : Anne et Benoît (A et B deux points fixes) devront choisir leur position et n'en plus bouger.
La règle du jeu :
Un essai pour voir si on comprend : Marie, peux-tu te mettre plus près de A que de B ? Vérification par tous, à l'aide de la corde à mesurer.
Marie, peux-tu te mettre plus près de B que de A ? Encore une bonne vérification.
Finalement, la vraie règle :
Marie, peux-tu te mettre aussi près de A que de B ? à la même distance de A et de B ?

[4]Pour cela, on pourrait, par exemple utiliser les exercices fournis en annexe à la fin de cet article.

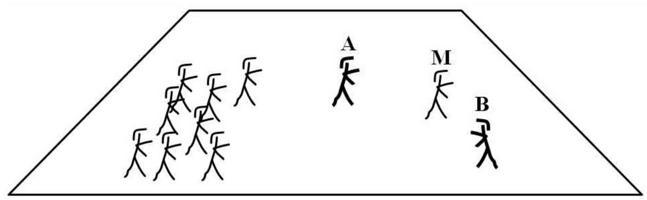

Figure 5a. Marie aussi près de Anne que de Benoît

Tous les élèves ont-ils une idée de l'endroit où Marie devrait se placer ? C'est parfait. Placez-vous **tous** à la même distance de A et de B.
Il est bien possible qu'il y ait un petit problème d'espace disponible, n'est-ce pas ?
À moins que ce ne soit un problème de compréhension : être « aussi près de A que de B » n'est pas une règle qui donne exactement la distance entre Marie et Anne, car on peut faire varier la distance entre Marie et Anne tout en conservant la règle[5].
En première année, nous suggérons de procéder par essais et erreurs, en utilisant beaucoup la mesure pour vérifier que la règle « à la même distance de A et de B » est bien respectée.
Et quand tout le monde est bien placé, maintenant, on ne bouge plus. On peut aussi faire une marque de craie à l'endroit où est situé chaque enfant.

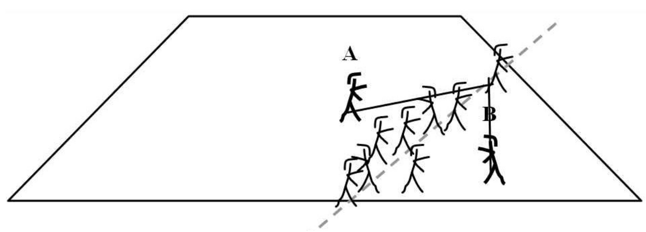

Figure 5b. La classe s'y met

Question : quelle est la figure constituée par l'ensemble des positions des enfants de la classe ?[6]
Les enfants sont-ils en ligne droite ? Cette droite passe-t-elle par le milieu du segment AB ? La figure constituée par le segment et la droite est-elle symétrique ? Bravo ! Cette droite s'appelle une « médiatrice », c'est la « médiatrice du segment AB ».
Encore une fois, nous suggérons de ne pas laisser ces nouvelles connaissances s'échapper dans la nature à la prochaine occasion. L'annexe donne une suggestion de retour en classe, par exemple le lendemain, avec papier, crayon et règle graduée[7].

Et maintenant, une variante : Vous êtes dans une classe de troisième cycle et vous avez déjà réalisé l'activité sur le cercle ? Alors, aujourd'hui commencez par demander à Anne et Benoît de se placer à une distance égale à une corde à sauter l'un de l'autre. Puis, demandez à Marie de dessiner par terre un cercle centré à Anne et de rayon égal à la longueur d'une corde à sauter. Puis demandez à

[5]Ici, nous suggérons une bonne période de réflexion active de la part des enfants (pas ou très peu d'intervention du professeur dans la discussion).
[6]De nouveau, possibilité de photo, d'observation par un enfant grimpé quelque part, etc...
[7]Voir deuxième activité dans l'annexe.

Philippe de tracer lui aussi un cercle de même rayon que le précédent, mais centré en Benoît. Où sont tous les points situés « à la fois à la distance d'une corde à sauter de Anne et à une corde à sauter de Benoît » ? C'est peut-être le moment de parler de triangle avec trois côtés de même longueur.

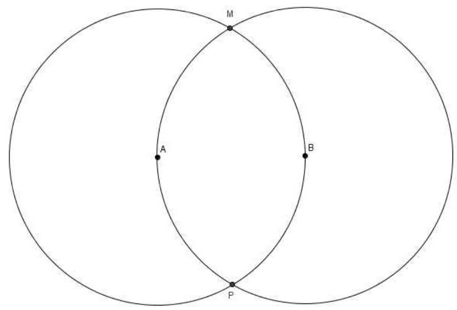

Figure 6a. M et P situés à la fois à une unité de A et de B

Il est possible aussi d'explorer les distances « à plus d'une corde à sauter » et « à moins d'une corde à sauter[8] », tout en exigeant que « les distances à Anne et à Benoît restent égales ».
Et quand **tout le monde** est bien placé, maintenant, on ne bouge plus. On peut aussi faire une marque de craie à l'endroit où est situé chaque enfant.

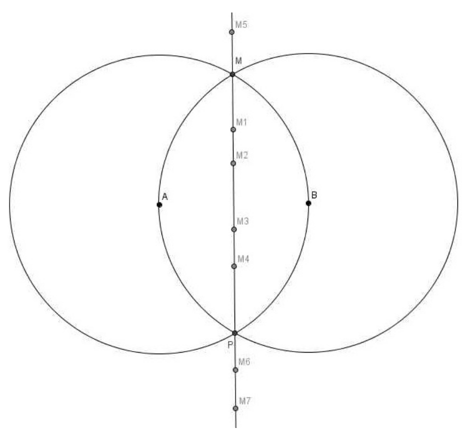

Figure 6b. Le lieu géométrique des points situés à égale distance de A et de B

Question : Quelle est la figure constituée par l'ensemble des positions des enfants de la classe ?[9]
Les enfants sont-ils en ligne droite ? Cette droite passe-t-elle par le milieu du segment AB ? Est-ce qu'elle penche plus vers A ou plus vers B ? Ni l'un ni l'autre ? Bravo ! Elle est l'axe de symétrie pour la figure constituée du segment et de la droite[10]. Voilà !

[8]Quelle est la plus petite valeur que peut prendre la distance de Marie à Anne et à Benoît dans cette situation ?
[9]Photo ?
[10]Pour que tout ceci reste bien installé dans l'esprit des enfants, on peut faire un retour en classe, comme proposé dans la troisième activité de l'annexe.

Le lieu géométrique des points situés à égale distance de deux points fixes donnés est une droite passant par le milieu du segment AB et perpendiculaire à celui-ci. On l'appelle la « médiatrice du segment AB »[11].

5 Un lieu géométrique utilisé par tous les jardiniers qui souhaitent avoir une jolie plate-bande

Vous pensez que c'est amusant ? Vous voulez récompenser vos élèves parce qu'ils ont été particulièrement attentifs aujourd'hui ? Vous avez besoin d'une corde assez longue (de 5 à 7 mètres). Voici la règle du jeu : placez-vous de telle sorte que la somme des distances de Marie à Appoline et de celle de Marie à Bernard soit constante.
Et si vous vous rendez jusqu'au bout de cette idée, vous trouverez un autre outil, celui-ci étant constitué de trois piquets, dont deux sont fixes et l'autre est mobile et sert de marqueur, ainsi que d'une corde. Cet outil sert aux jardiniers pour tracer des ellipses parfaites (à l'échelle du jardinier ![12]).

Il faut s'arrêter... mais nous aurions encore beaucoup d'idées, comme celle de définir la distance d'un point à une droite, puis de demander aux enfants de se placer à égale distance de deux droites qui se croisent (de préférence pas du tout à angle droit). Nous vous laissons y penser.

6 Enseigner les lieux géométriques au primaire ?

Nous vous avons proposé une activité physique mettant en œuvre la connaissance de notions comme « plus près », « plus loin » et « à la même distance », mais elle visait aussi un apprentissage mathématique. Lequel des deux éclaire l'autre ? Difficile à dire, mais regardons la définition que donne le MÉLS du mot « transversal ».
Citons à ce sujet la page 12 du *Programme de formation de l'école québécoise.*

> [...] Certaines (compétences) se situent à l'intersection des compétences disciplinaires et ne peuvent être véritablement prises en compte que si un lieu d'intervention leur est associé. C'est ainsi qu'ont été définies les compétences transversales. Elles sont dites transversales en raison de leur caractère générique, en raison du fait qu'elles se déploient à travers les divers domaines d'apprentissage et parce qu'elles doivent être promues par tout le personnel de l'école.

Il nous semble plutôt que certaines notions vivent au-delà des disciplines. En effet, bien malin celui qui dira que « plus loin » ou « à la même distance » appartiennent à telle ou telle discipline. Est-il vraiment nécessaire de leur associer un seul lieu d'intervention ? Ces notions peuvent « passer »

[11] Pour une illustration animée de ces deux derniers lieux géométriques et de plusieurs autres, consulter http ://homeomath.imingo.net/lieux.htm.
[12] http ://fr.wikipedia.org/wiki/Ellipse_(mathématiques).

d'une discipline à l'autre, à condition d'en organiser le passage. C'est le but des représentations avec papier et crayon de la situation du gymnase.

Et revenons une dernière fois sur la représentation géométrique de la situation vécue au gymnase. Nous insistons sur cette activité, le MÉSL aussi. Voyons ses exigences quant à l'enseignement des mathématiques, telles qu'énoncées à la page 128 du *Programme de formation de l'école québécoise* :

> Compétence 2...
> Explication
> [...] Pour pratiquer le raisonnement mathématique, il faut appréhender la situation, mobiliser les concepts et les processus pertinents et établir des liens. Une telle démarche amène l'élève à s'approprier le langage mathématique, à construire le sens des concepts et des processus mathématiques et à les lier entre eux. Cette démarche invite aussi l'élève à se servir d'instruments mathématiques.
> Différents exemples permettent d'illustrer le déploiement de cette compétence. En arithmétique [...] ; en géométrie, à dégager les caractéristiques des figures planes et des solides et à établir des relations spatiales ;...
> ...
> Contexte de réalisation
> [...] L'élève utilise prioritairement du matériel de manipulation, a recours à la technologie et consulte au besoin une personne-ressource. Il se sert d'outils qui vont du simple papier quadrillé à l'ordinateur.

Nous en concluons qu'il est à propos d'aborder cette notion mathématique au primaire et, qui plus est, de cette manière. Les activités proposées dans le présent article utilisent des compétences abstraites, mais aussi des compétences de motricité associées au cours d'EPS. Elles montrent aux élèves que lorsqu'on réfléchit sur des déplacements, on peut découvrir des figures géométriques. N'est-ce pas une compétence intéressante à développer ?

La prochaine fois que vous aurez à passer vingt ou trente minutes dans l'autobus, plutôt que de vous ennuyer, faites de la géométrie et imaginez toutes sortes de « règles » qui « caractérisent » des figures. On peut partir de la figure ou de la règle, au choix. Nous vous souhaitons d'attraper l'œil géométrique, celui qui voit des cercles à la place des roues de bicyclette.

ANNEXE : LES ACTIVITÉS DE RETOUR EN CLASSE

TROIS ACTIVITÉS DE LECTURE ET D'ÉCRITURE SUITE AUX ACTIVITÉS DANS LE GYMNASE

Distribuer aux élèves trois feuilles de papier sur lesquelles sont tracés **exactement au même endroit** deux points nommés A et B. Matériel : compas ou règle.

Première activité : « Les mathématiques en mouvement »

1) Imaginez que la croix A est votre ami ***Albert*** et que le point B est votre amie ***Béatrice***. Vous voulez tous être aussi près d'***Albert*** que ne l'est ***Béatrice***.
2) Tracez au crayon quelques-uns des endroits où vous pouvez vous mettre pour être aussi près d'Albert que l'est Béatrice.
3) Tracez en rouge une des cordes que vos amis tenaient dans le gymnase.
   Vous venez de tracer le ________________ dont le point A est ________________.

Deuxième activité : « Les mathématiques en mouvement »

1) Imaginez que les 2 croix A et B sont vos 2 amis ***Anne*** et ***Benoît*** dont vous voulez tous être aussi près de l'un que de l'autre.
2) Tracez au crayon quelques-uns des endroits où vous pouvez vous mettre pour être à la même distance des deux comme on l'a fait au gymnase.
3) Encerclez en rouge l'endroit où, en plus, vous êtes le plus près de A et de B en même temps.
   Vous venez de tracer la ________________ du segment formé par les 2 points A et B.

Troisième activité : « Les mathématiques en mouvement »

1) Imaginez que les 2 croix A et B sont vos 2 amis ***Albert*** et ***Béatrice*** dont vous voulez tous être aussi près de l'un que de l'autre.
2) Pliez en 2 la feuille pour que la croix de Albert tombe sur la croix de Béatrice. Pour vous aider, regardez « à travers » la feuille vers une source de lumière.
3) Tracez au crayon un trait sur le pli que vous venez de faire.
   Vous venez de tracer la ________________ des 2 points A et B.
   Vérifiez en mettant les feuilles 2 et 3 une par-dessus l'autre et en regardant vers une source de lumière.

Références

[1] Bilinski, Robert. (2008). « Mathématiques en mouvement en première année du primaire », *Bulletin de l'AMQ*, mars 2008 (Chronique Enseignement), p. 35-40.

[2] M.E.L.S., Programme de formation de l'école québécoise : Éducation préscolaire, Enseignement primaire, 2001.