Association Mathématique du Québec

Note mathématique

Denis Tanguay,
pour le Comité de rédaction

L'article qui paraît ci-dessous porte sur un résultat « classique » de l'algèbre polynomiale, à savoir la résolution générale de l'équation du 3ᵉ degré. La méthode de résolution diffère cependant de ce qu'on peut lire dans la plupart des manuels qui traitent du sujet, en ce qu'elle ne ramène pas dès le départ l'équation générale à une équation plus simple, de la forme $x^3 + px + q = 0$. En outre, dans le cas où il y a trois racines réelles également espacées sur l'axe, on y montre que les deux aires enfermées par la courbe et l'axe des abscisses sont égales.

La résolution donne lieu ici à des calculs passablement complexes, et c'est en grande partie ce qui a attiré l'attention des membres du comité de rédaction. Il nous est apparu en effet intéressant de montrer un aspect de l'activité mathématique qui semble se perdre, notamment au collégial et en première année d'université : prendre son courage à deux mains, son stylo de la troisième et... se lancer dans les calculs, sans s'effrayer ni de leur longueur, ni de leur complexité ! Si l'on ajoute à cela que l'auteur de l'article est originaire de la Guinée forestière, enseignait à l'université de Kankan (à 700 km environ de la capitale Conakry) au moment où il a rédigé l'article — il enseigne maintenant au Centre universitaire de Kindia —, pratique la recherche mathématique presque exclusivement seul, avec des ressources bibliographiques et informatiques très restreintes, on comprendra qu'aux intérêts mathématique et pédagogique du texte s'ajoute un intérêt humain, que nous avons voulu partager avec le lecteur du *Bulletin*. Merci à Pierre Bouchard, de l'UQAM, pour nous avoir fait connaître le professeur Kalivogui et ses travaux !

Sur l'équation générale du 3ᵉ degré

Siba Kalivogui,
Département de mathématiques,
Centre universitaire de Kindia,République de Guinée,
sibakalivogui@yahoo.fr

Nous nous proposons de démontrer un théorème sur l'équation générale du 3e degré à coefficients réels.

Théorème *Soient f la fonction polynôme de degré trois définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (1), où a, b, c et d sont des réels avec $a \neq 0$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.*

Si x_1, x_2, x_3 sont les racines de l'équation (1) et A_1, A_2 sont les aires des surfaces déterminées par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = x_1, x = x_2$ et $x = x_3$ $(x_1 < x_2 < x_3)$, nous avons les cas suivants :

1) lorsque $9abc - 2b^3 - 27a^2d = 0$, trois cas se présentent :

1^{er} cas : $b^2 - 3ac > 0$, alors les racines sont toutes réelles :

$$x_1 = -\frac{b}{3a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{3(b^2 - 3ac)}}{3a},\ x_3 = \frac{-b - \sqrt{3(b^2 - 3ac)}}{3a}$$

et les aires A_1 et A_2 sont égales ;

2^e cas : $b^2 - 3ac < 0$, alors les racines sont :

$$x_1 = -\frac{b}{3a}, x_2 = \frac{-b + i\sqrt{3(3ac - b^2)}}{3a},\ x_3 = \frac{-b - i\sqrt{3(3ac - b^2)}}{3a};$$

3^e cas : $b^2 - 3ac = 0$, c'est-à-dire $b^2 = 3ac$, alors l'unique solution est $x = -\dfrac{b}{3a}$.

2) lorsque $b^2c^2 + 18abcd - 4b^3d - 4ac^3 - 27a^2d^2 = 0$, l'équation (1) admet deux racines dont l'une est l'un des nombres $\dfrac{\pm 2\sqrt{b^2 - 3ac} - b}{3a}$ et l'autre l'un des nombres $-\dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - 3a}}{3a}$.

Pour la preuve de ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme *Lorsque $b^2 = 3ac$, l'équation (1) à coefficients réels avec $a \neq 0$ admet une seule racine réelle : $x_1 = \dfrac{q - p}{m}$ où $m = \sqrt[3]{a}$, $p = \dfrac{b}{3m^2}$, $q = \sqrt[3]{p^3 - d}$. Les autres racines sont : $x_2 = \dfrac{-2p - q + iq\sqrt{3}}{2m}$ et $x_3 = -\dfrac{2p + q + iq\sqrt{3}}{2m}$.*

Preuve En posant $ax^3 + bx^2 + cx + d = (mx + p)^3 - q^3$ où $m \neq 0$, p et q étant des réels à déterminer, on a $ax^3 + bx^2 + cx + d = m^3x^3 + 3m^2px^2 + 3mp^2x + p^3 - q^3$, d'où le système

$$\begin{cases} m^3 = a \\ 3pm^2 = b \\ 3p^2m = c \\ p^3 - q^3 = d \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} m = \sqrt[3]{a} & (2) \\ p = \dfrac{b}{3m^2} & (3) \\ p = \sqrt{\dfrac{c}{3m}} & (4) \\ q^3 = p^3 - d & (5) \end{cases}.$$

a) Si $\dfrac{c}{m} > 0$, des égalités (3) et (4) ci-dessus nous obtenons $\dfrac{b}{3m^2} = \sqrt{\dfrac{c}{3m}} \Leftrightarrow \dfrac{b^2}{9m^4} = \dfrac{c}{3m}$, d'où $b^2 = 3m^3c$ ou $b^2 = 3ac$ car $m^3 = a$.

Nous avons alors $p = \dfrac{b}{3m^2}$, $m = \sqrt[3]{a}$, $q = \sqrt[3]{p^3 - d}$.

L'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ s'écrit alors

$$(mx + p)^3 - q^3 = (mx + p - q)[(mx + p)^2 + q(mx + p) + q^2] = 0$$

ou $(mx+p-q)(m^2x^2+2pmx+p^2+mqx+pq+q^2)=0$,

c'est-à-dire $(mx+p-q)[m^2x^2+m(2p+q)x+p^2+pq+q^2]=0$.

1^er^ cas : $mx+p-q=0$. On a $x_1=\dfrac{q-p}{m}$;

2^e^ cas : $m^2x^2+m(2p+q)x+p^2+pq+q^2=0$.

Nous avons une équation du second degré dont le discriminant est

$$\Delta = m^2(4p^2+4pq+q^2)-4m^2(p^2+pq+q^2)$$
$$\Delta = 4m^2p^2+4m^2pq+m^2q^2-4m^2p^2-4m^2pq-4m^2q^2$$
$$\Delta = -3m^2q^2 = 3(imq)^2,\ \text{où } i^2=-1.$$

Les autres racines sont donc

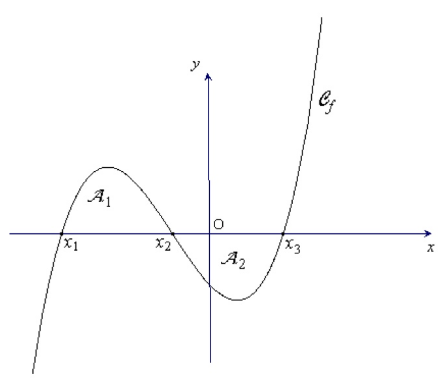
$$x_2=\frac{-m(2p+q)+imq\sqrt{3}}{2m^2}=\frac{-2p-q+iq\sqrt{3}}{2m},$$
$$x_3=\frac{-m(2p+q)-imq\sqrt{3}}{2m^2}=-\frac{2p+q+iq\sqrt{3}}{2m}.$$

b) Si $\dfrac{c}{m}<0$, la condition $b^2=3ac$ n'est pas vérifiée.

Preuve du théorème

En supposant les racines x_1, x_2 et x_3 distinctes $(x_1<x_2<x_3)$, les aires A_1 et A_2 sont telles que (voir figure)

$$A_1=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=\left[\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2+dx\right]_{x_1}^{x^2}$$
$$A_1=\frac{a}{4}(x_2^4-x_1^4)+\frac{b}{3}(x_2^3-x_1^3)+\frac{c}{2}(x_2^2-x_1^2)+d(x_2-x_1),$$
$$A_2=-\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx=-\frac{a}{4}(x_3^4-x_2^4)-\frac{b}{3}(x_3^3-x_2^3)-\frac{c}{2}(x_3^2-x_2^2)-d(x_3-x_2).$$



Trouvons x_1, x_2 et x_3 pour que $A_1 = A_2$.

Nous avons $A_1 = A_2 \Leftrightarrow$

$$\frac{a}{4}(x_3^4 - x_1^4) + \frac{b}{3}(x_3^3 - x_1^3) + \frac{c}{2}(x_3^2 - x_1^2) + d(x_3 - x_1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{a}{4}(x_3 + x_1)(x_3^2 + x_1^2) + \frac{b}{3}(x_3^2 + x_1^2 + x_1x_3) + \frac{c}{2}(x_3 + x_1) + d = 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{a}{4}(x_1 + x_3)[(x_1 + x_3)^2 - 2x_1x_3] + \frac{b}{3}[(x_1 + x_3)^2 - x_1x_3] + \frac{c}{2}(x_1 + x_3) + d = 0.$$

Or, nous savons que les racines x_1, x_2 et x_3 de (1) sont telles que

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases} \qquad (6).$$

Donc, en tirant $x_1 + x_3$ dans la première équation et x_1x_3 dans la seconde, nous avons $x_1 + x_3 = -\dfrac{b}{a} - x_2$,

$$x_1x_3 = \frac{c}{a} - x_2(x_1 + x_3) = \frac{c}{a} - x_2\left(-\frac{b}{a} - x_2\right) = \frac{c}{a} + \frac{b}{a}x_2 + x_2^2.$$

Donc $A_1 = A_2 \Leftrightarrow$

$$\frac{a}{4}\left(-\frac{b}{a} - x_2\right)\left[\frac{b^2}{a^2} + 2\frac{b}{a}x_2 + x_2^2 - \frac{2c}{a} - \frac{2b}{a}x_2 - 2x_2^2\right] + \frac{b}{3}\left(\frac{b^2}{a^2} + 2\frac{b}{a}x_2 + x_2^2 - \frac{c}{a} - \frac{b}{a}x_2 - x_2^2\right)$$
$$+\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a} - x_2\right) + d = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{4}\left(-\frac{b}{a} - x_2\right)\left(\frac{b^2}{a^2} - x_2^2 - 2\frac{c}{a}\right) + \frac{b}{3}\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{b}{a}x_2 - \frac{c}{a}\right) + \frac{c}{2}\left(-\frac{b}{a} - x_2\right) + d = 0$$
$$\Leftrightarrow -\frac{b^3}{4a^2} + \frac{b}{4}x_2^2 + \frac{bc}{2a} - \frac{b^2}{4a}x_2 + \frac{a}{4}x_2^3 + \frac{c}{2}x_2 + \frac{b^3}{3a^2} + \frac{b^2}{3a}x_2 - \frac{bc}{3a} - \frac{bc}{2a} - \frac{c}{2}x_2 + d = 0.$$

En multipliant les deux membres de cette dernière égalité par $-12a^2$, nous obtenons

$$3b^3 - 3a^2bx_2^2 - 6abc + 3ab^2x_2 - 3a^3x_2^3 - 6a^2cx_2 - 4b^3 - 4ab^2x_2 + 4abc + 6abc + 6a^2cx_2 - 12a^2d = 0,$$

ou $-3a^3x_2^3 - 3a^2bx_2^2 - ab^2x_2 - b^3 + 4abc - 12a^2d = 0$, c'est-à-dire

$$3a^3x_2^3 + 3a^2bx_2^2 + ab^2x_2 + b^3 - 4abc + 12a^2d = 0 \qquad (7).$$

En posant $A = 3a^3$, $B = 3a^2b$, $C = ab^2$, $D = b^3 - 4abc + 12a^2d$, nous avons $B^2 = 9a^4b^2 = 3AC$.

Donc, d'après le lemme, l'équation (7) admet une seule racine réelle qui est $x_2 = \dfrac{q-p}{m}$, où $m = \sqrt[3]{A} = a\sqrt[3]{3}$, $p = \dfrac{B}{3m^2} = \dfrac{b}{\sqrt[3]{9}}$, $q = \sqrt[3]{p^3 - D} = \sqrt[3]{-\dfrac{8}{9}b^3 + 4abc - 12a^2d}$.

Nous avons $x_2 = \dfrac{\sqrt[3]{-\frac{8}{9}b^3 + 4abc - 12a^2d} - \frac{b}{\sqrt[3]{9}}}{a\sqrt[3]{3}}$

$x_2 = \dfrac{\sqrt[3]{-8b^3 + 36abc - 108a^2d} - b}{a\sqrt[3]{27}}$,

d'où $x_2 = \dfrac{\sqrt[3]{-8b^3 + 36abc - 108a^2d} - b}{3a}$.

En posant $u^3 = 36abc - 8b^3 - 108a^2d = 4(9abc - 2b^3 - 27a^2d)$, nous obtenons $x_2 = \dfrac{u-b}{3a}$. x_2 étant une racine de l'équation (1), nous avons

$$ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d = 0 \Leftrightarrow a\left(\frac{u-b}{3a}\right)^3 + b\left(\frac{u-b}{3a}\right)^2 + c\left(\frac{u-b}{3a}\right) + d = 0.$$

En développant, nous avons

$$a \cdot \frac{u^3 + 3b^2u - 3bu^2 - b^3}{27a^3} + b \cdot \frac{u^2 - 2bu + b^2}{9a^2} + c \cdot \frac{u-b}{3a} + d = 0,$$

$$u^3 - 3bu^2 + 3b^2u - b^3 + 3bu^2 - 6b^2u + 3b^3 + 9acu - 9abc + 27a^2d = 0,$$

$$u^3 - 3b^2u + 2b^3 + 9acu - 9abc + 27a^2d = 0.$$

$36abc - 8b^3 - 108a^2d - 3b^2u + 2b^3 + 9acu - 9abc + 27a^2d = 0$ (car $u^3 = 36abc - 8b^3 - 108a^2d$),

$$27abc - 6b^3 - 81a^2d - 3b^2u + 9acu = 0,$$

$9abc - 2b^3 - 27a^2d - b^2u + 3acu = 0$ (simplification par 3),

$$9abc - 2b^3 - 27a^2d - u(b^2 - 3ac) = 0 \qquad (8).$$

Or $9abc - 2b^3 - 27a^2d = \dfrac{u^3}{4}$, et par suite (8) $\Leftrightarrow \dfrac{u^3}{4} - u(b^2 - 3ac) = 0$

$\Leftrightarrow u^3 - 4u(b^2 - 3ac) = 0$

$\Leftrightarrow u[u^2 - 4(b^2 - 3ac)] = 0.$

Distinguons deux cas :

1^er^ cas : $u = 0$, c'est-à-dire $\boxed{9abc - 2b^3 - 27a^2d = 0}$

Nous avons $x_2 = -\dfrac{b}{3a}$.

Trouvons x_1 et x_3 en utilisant la première et la troisième relations du système (6). Nous avons

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = -\dfrac{b}{a} - x_2 \\ x_1x_3 = -\dfrac{d}{ax_2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x_1 + x_3 = -\dfrac{2b}{3a} \\ x_1x_3 = \dfrac{3d}{b} \end{cases}.$$

x_1 et x_3 sont donc les racines de l'équation du second degré $x_1^2 + \dfrac{2b}{3a}x_1 + \dfrac{3d}{b} = 0$.

Le discriminant de cette équation est

$\Delta = \dfrac{4b^2}{9a^2} - \dfrac{12d}{b} = \dfrac{4b^3 - 108a^2d}{9a^2b}$

$\Delta = \dfrac{4(b^3 - 27a^2d)}{9a^2b}$,

mais comme $-27a^2d = 2b^3 - 9abc$,

$\Delta = \dfrac{4(b^3 + 2b^3 - 9abc)}{9a^2b} = \dfrac{12b(b^2 - 3ac)}{9a^2b}$

$\Delta = \dfrac{4(b^2 - 3ac)}{3a^2}$.

- Si $b^2 - 3ac > 0$, alors $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{3(b^2 - 3ac)}}{3a}$ et $x_3 = \dfrac{-b - \sqrt{3(b^2 - 3ac)}}{3a}$;

- Si $b^2 - 3ac < 0$, alors $x_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{3(3ac - b^2)}}{3a}$ et $x_3 = \dfrac{-b - i\sqrt{3(3ac - b^2)}}{3a}$;

- Si $b^2 - 3ac = 0$, c'est-à-dire $b^2 = 3ac$, l'unique racine est $x = \dfrac{-b}{3a}$.

2^e cas : $u^2 = 4(b^2 - 3ac)$

- Si $b^2 - 3ac = 0$, voir 1^{er} cas ;

- Si $b^2 - 3ac < 0$, alors $u^2 < 0$ et il n'y as pas de racine ;

- Si $b^2 - 3ac > 0$, alors nous avons :

$u \pm 2\sqrt{b^2 - 3ac}$

$u^3 = \pm 8\sqrt{(b^2 - 3ac)^3}$ donc $u^6 = 64(b^2 - 3ac)^3$.

Mais $u^3 = 36abc - 8b^3 - 108a^2d = 4(9abc - 2b^3 - 27a^2d)$,

donc $u^6 = \pm 64(b^2 - 3ac)^3 \Leftrightarrow$

$16(9abc - 2b^3 - 27a^2d)^2 = 64(b^2 - 3ac)^3 \Leftrightarrow (9abc - 2b^3 - 27a^2d)^2 = 4(b^2 - 3ac)^3$,

ce qui donne

$\boxed{b^2c^2 + 18abcd - 4b^3d - 4ac^3 - 27a^2d^2 = 0}$.

L'une des racines étant $x_2 = \dfrac{u - b}{3a}$ où $u = \pm 2\sqrt{b^2 - 3ac}$, trouvons les deux autres racines x_1 et x_3.

Nous avons $x_1 + x_3 = -\dfrac{b}{a} - x_2 = -\dfrac{b}{a} - \dfrac{u - b}{3a} = -\dfrac{2b + u}{3a}$ et

$x_1x_3 = \dfrac{c}{a} + \dfrac{b}{a}x_2 + x_2^2 = \dfrac{c}{a} + \dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{u - b}{3a} + \dfrac{u^2 - 2ub + b^2}{9a^2} = \dfrac{u^2 - 2b^2 + bu + 9ac}{9a^2}$.

Donc x_1 et x_3 sont les racines de l'équation

$$x_1^2 + \frac{2b+u}{3a}x_1 + \frac{u^2 - 2b^2 + bu + 9ac}{9a^2} = 0.$$

Nous avons

$$\Delta = \frac{4b^2 + 4bu + u^2 - 4u^2 + 8b^2 - 4bu - 36ac}{9a^2} = \frac{12b^2 - 3u^2 - 36ac}{9a^2}$$

$$\Delta = \frac{4b^2 - u^2 - 12ac}{3a^2} = \frac{4b^2 - 4(b^2 - 3ac) - 12ac}{3a^2}$$

$$\Delta = \frac{4b^2 - 4b^2 + 12ac - 12ac}{3a^2} = 0,$$

d'où $x_1 = x_3 = \dfrac{-\frac{2b+u}{3a}}{2} = -\dfrac{2b+u}{6a}$

$$x_1 = x_3 = -\frac{2b \pm 2\sqrt{b^2 - 3ac}}{6a}$$

$x_1 = x_3 = -\dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$. Ce qu'il fallait démontrer.

EXEMPLES

1. $x^3 + 6x^2 + 8x = 0$

$a = 1,\ b = 6,\ c = 8,\ d = 0.$

Nous avons $9abc - 2b^3 - 27a^2d = 0$, $b^2 - 3ac = 36 - 24 = 12 > 0$.

Les racines sont $x_1 = -\dfrac{6}{3} = -2,\ x_2 = \dfrac{-6 + \sqrt{3(12)}}{3} = 0,\ x_3 = \dfrac{-6-6}{3} = -4.$

2. $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$

$a = 1,\ b = -9,\ c = 23,\ d = -15.$

Nous avons $9abc - 2b^3 - 27a^2d = 0$, $b^2 - 3ac = 81 - 69 = 12 > 0$, et donc $x_1 = 3,\ x_2 = 5, x_3 = 1.$

3. $2x^3 + 2x^2 + x + \dfrac{5}{27} = 0$

$a = 2 = b,\ c = 1,\ d = \dfrac{5}{27},\ b^2 - 3ac = 4 - 3(2) = -2 < 0.$

Donc $x_1 = -\dfrac{1}{3},\ x_2 = \dfrac{-2 + i\sqrt{6}}{6},\ x_3 = -\dfrac{2 + i\sqrt{6}}{6}.$

4. $x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = 0$

$a = 1,\ b = 3,\ c = 4,\ d = 2.$

Nous avons $9abc - 2b^3 - 27a^2d = 0$, $b^2 - 3ac = 9 - 12 = -3 < 0$, et donc

$x_1 = -1,\ x_2 = \dfrac{-3 + i\sqrt{9}}{3} = -1 + i,\ x_3 = -1 - i.$

5. $x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0$

$a = 1$, $b = -3$, $c = 3$, $d = -2$.

Nous avons $9abc - 2b^3 - 27a^2d = 9 \cdot 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-3)^3 - 27 \cdot 1^2 \cdot (-2) = -81 + 54 + 54 = 27 \neq 0$.

En utilisant le lemme, nous avons

$m = 1,\ p = \dfrac{b}{3m^2} = -1,\ q = \sqrt[3]{p^3 - d} = \sqrt[3]{1} = 1,$

d'où $x_1 = \dfrac{1+1}{1} = 2,\ x_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2},\ x_3 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$