

Énigmes et jeux mathématiques

Énigmes mathématiques pour les jeunes

CHRONIQUEUR : PAUL TOUTOUNJI,
ÉCOLE SECONDAIRE ANTOINE-DE-SAINT-EXUPÉRY

Note de la rédaction : La chronique *Énigmes et jeux*, tenue par Paul Toutounji, sera suspendue temporairement faute de temps. Nous souhaitons tous son retour prochain et remercions sincèrement son auteur de sa collaboration.

Solutions des énigmes parues dans le numéro de mai 2008

1. Effectuer le produit suivant :

$$\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) \times \dots \times \left(1 - \left(\frac{1}{2008}\right)^2\right).$$

Il s'agit d'une série télescopique : en factorisant, on obtient :

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{2007}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2007}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2008}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2008}\right).$$

En réduisant, on a :

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \dots \times \frac{2006}{2007} \times \frac{2008}{2007} \times \frac{2007}{2008} \times \frac{2009}{2008}.$$

En simplifiant, on trouve : $\frac{1}{2} \times \frac{2009}{2008}$ ou $\frac{2009}{4016}$.

2. Calculer la probabilité que deux individus ou plus soient nés exactement le même jour dans un groupe de 24 personnes.

Il faut passer par l'événement complémentaire en évaluant l'expression

$$1 - \left(\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \dots \times \frac{342}{365}\right)$$

et on trouve plus d'une chance sur 2 (environ 54 %) qu'au moins deux personnes soient nées le même jour !

3. Sophia décide de faire une course à bicyclette avec son amie Linda. Comme Sophia est plus rapide, elle laisse à son amie 30 minutes d'avance. Si Sophia roule à une vitesse moyenne de 30 km/h et que Linda va à 25 km/h, après combien de temps se rejoindront-elles et quelle distance leur restera-t-il à parcourir si la course est de 90 km ?

Soit x , le temps écoulé depuis le départ de Sophia jusqu'à ce qu'elle rejoigne Linda, exprimé en heures. Donc $x + 0,5$ est le temps écoulé depuis le départ de Linda.

Soit aussi y , la distance parcourue à ce moment-là.

Les équations sont alors :

$$\begin{cases} y = 30x \\ y = 25(x + 0,5) \end{cases} .$$

En résolvant ce système, on trouve que Sophia rejoindra Linda après 2,5 heures, donc 3 heures après le départ de Linda. En remplaçant par sa valeur, on trouve que la distance parcourue sera de 75 km. Donc il reste encore 15 km à parcourir.

N.B. On aurait pu poser x , le temps parcouru depuis le départ de Linda et les équations auraient été :

$$\begin{cases} y = 25x \\ y = 30(x - 0,5) \end{cases} .$$

Dans cette variante, Sophia aurait rejoint Linda en 3 heures et aurait roulé pendant $3 - 0,5 = 2,5$ heures.