
Notions de contrôle optimal appliquées à la gestion d'une ressource renouvelable

DENIS LAVIGNE,
COLLÈGE MILITAIRE ROYAL DE SAINT-JEAN

Résumé

Cet article résume certaines publications de Clark, Clarke et Munro concernant la gestion optimale d'une ressource renouvelable. Plusieurs méthodes dues à ces auteurs sont utilisées pour résoudre divers problèmes de contrôle optimal (dont la résolution d'un problème de contrôle optimal de type biniveaux). L'article peut être considéré comme étant un tutoriel concernant de tels problèmes d'optimisation et l'objectif consiste à favoriser chez le lecteur le développement de connaissances de quelques notions mathématiques avancées en optimisation.

1 Introduction

L'étude de la gestion de ressources renouvelables peut conduire à une série de problèmes de contrôle optimal. Certaines de ces questions d'ordre mathématique ont été étudiées par Clark, Clarke et Munro et ont donné naissance à plusieurs publications scientifiques sur le sujet. Cet article présente un résumé de certains de leurs travaux [1, 2, 4, 6, 7] et constitue une introduction intéressante à la théorie du contrôle optimal ainsi qu'à son application à une situation meneur-suiveur (de type biniveaux). En ce sens, le présent article peut être considéré comme étant un tutoriel concernant de tels problèmes d'optimisation et l'objectif de celui-ci consiste à favoriser chez le lecteur le développement de connaissances de quelques notions mathématiques avancées en optimisation.

Nous étudions dans les pages qui suivent le cas d'une industrie de pêche. Il est donc question de fonction de production correspondant à la récolte de poissons, de taux de croissance naturelle de la population de poissons ainsi que de différents paramètres et autres facteurs essentiels à la compréhension et à l'étude de ce cas particulier.

La section 2 établit un certain modèle décrivant l'évolution d'une ressource renouvelable (la population de poissons) ainsi que la fonctionnelle objectif correspondant aux aspirations de l'industrie. Elle doit pour cela identifier les facteurs qu'elle contrôle. Le problème consiste à contrôler ces facteurs de façon à optimiser la fonctionnelle objectif. La résolution de ce problème est effectuée via une simple application du théorème de Green dans le plan.

La section 3 présente une version modifiée du problème initial en permettant une modification de l'effort de pêche maximal (via, par exemple, un investissement dans du nouvel équipement). La section 4 propose une analyse agent-principal (biniveaux) de la gestion d'une ressource renouvelable. On discute des situations où (1) le principal contrôle parfaitement l'action de l'agent et (2) le principal ne peut qu'influencer l'action de l'agent. Une conclusion complète cet article.

2 Le problème de base

2.1 Présentation du modèle de base

Les modèles utilisés pour l'étude de la gestion optimale des ressources renouvelables utilisent parfois une équation différentielle ordinaire de la forme

$$\frac{dx}{dt} = F(x) - r(t), \quad (1)$$

où $x(t) :=$ taille de la population au temps t , $F(x) :=$ taux de croissance naturelle de la population et $r(t) :=$ taux de récolte au temps t .

Le taux de récolte $r(t)$ est déterminé par deux quantités : la taille de la population $x(t)$ et le taux d'effort $E(t)$. Nous supposons la relation

$$r(t) = E(t)x(t). \quad (2)$$

Dans ce type de problème, $r(t)$ est appelé la fonction de production de l'industrie. Nous supposons toujours $t \geq 0$, $x(t) \geq 0$ et $r(t) \geq 0$ (donc $E(t) \geq 0$). La modélisation du taux de croissance naturelle de la population, i.e. $F(x)$, peut être effectuée à partir de certaines données expérimentales. Nous supposons dans cette étude être en présence du modèle de Schaefer [9], i.e.

$$F(x) = \alpha x \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad (3)$$

où $\alpha :=$ taux de croissance intrinsèque de la population et $K :=$ niveau de saturation du milieu.

Il est aussi nécessaire d'utiliser un modèle pour représenter la fonctionnelle objectif, cette dernière étant ici la valeur actuelle des profits accumulés dans le temps. Si nous considérons que p représente le prix constant par unité de biomasse et que les coûts d'opération sont proportionnels à l'effort fourni, où c est la constante de proportionnalité ; alors cet objectif peut être exprimé comme suit :

$$VA = \int_0^T e^{-\delta t} [pr(t) - cE(t)] dt = \int_0^T e^{-\delta t} [px(t) - c] E(t) dt, \quad (4)$$

où $\delta > 0 :=$ constante représentant le taux d'actualisation, $VA :=$ valeur actuelle et $T :=$ horizon du problème.

Il s'agit de trouver un taux d'effort $E(t)$ (i.e. une politique d'effort ou encore un profil de l'effort fourni) tel que la valeur actuelle précédente soit maximisée. Le problème ainsi présenté, sujet aux conditions (1), (2) et (3) ainsi qu'à une certaine condition initiale $x(0) = x_0$, est un problème typique de la théorie du contrôle optimal linéaire.

2.2 Résolution du problème de base à l'aide du théorème de Green

En posant les hypothèses supplémentaires

$$0 \leq E(t) \leq E_{max} \quad (5)$$

$$x(T) = x_T, \quad (6)$$

où E_{max} := borne supérieure due à des conditions techniques et $x(T)$:= condition terminale, il nous est possible d'utiliser une méthode faisant appel à une simple application du théorème de Green dans le plan pour résoudre le problème de base. À partir des équations (1) et (2), nous pouvons écrire la fonctionnelle objectif (4) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \max_{x \in X} \int_0^T e^{-\delta t} [p - c(x)] [F(x) - \dot{x}] dt \\ & = \max_{x \in X} \int_0^T \{ e^{-\delta t} [p - c(x)] F(x) - e^{-\delta t} [p - c(x)] \dot{x} \} dt, \end{aligned} \quad (7)$$

où X := classe des fonctions lisses par parties $x(t)$ qui satisfont $x(0) = x_0$ et $x(T) = x_T$, $c(x) = \frac{c}{x}$:= coût de récolte d'une unité supplémentaire de la ressource x et $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

En posant

$$G(t, x) = e^{-\delta t} \{p - c[x(t)]\} F(x) \quad (8)$$

$$H(t, x) = -e^{-\delta t} \{p - c[x(t)]\}, \quad (9)$$

nous obtenons un problème de la forme

$$\max_{x \in X} \int_0^T [G(t, x) + H(t, x)\dot{x}] dt. \quad (10)$$

De plus, grâce à (1) et (2) la contrainte (5) peut être mise sous la forme

$$A(x, t) = F(x) - xE_{max} \leq \dot{x} \leq F(x) = B(x, t). \quad (11)$$

La proposition suivante, dont la démonstration fait appel au théorème de Green, nous est d'une grande utilité pour résoudre le problème (10) sujet à la contrainte (11).

Proposition : *Supposons que*

$$\frac{\partial G}{\partial x} \geq \frac{\partial H}{\partial t} \text{ lorsque } x(t) \leq x^*(t), \quad (12)$$

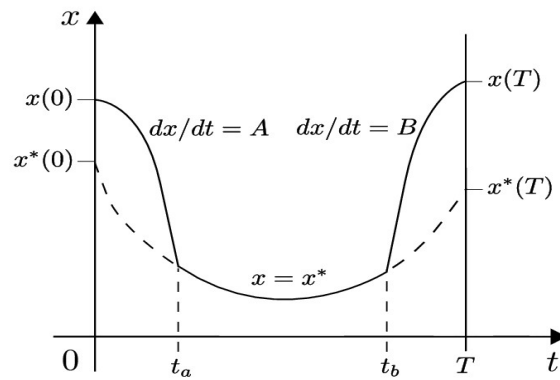
où $x^*(t)$ est la solution unique de l'équation

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (13)$$

Alors la solution du problème (10) sujet à la contrainte (11) est la trajectoire $x(t)$ décrite comme ceci (voir Graphe 1) :

1. Si $x(0) = x_0 > x^*(0)$, alors le chemin optimal $x(t)$ utilise le taux de décroissance le plus rapide, i.e. $\dot{x} = A(x, t)$, jusqu'à ce que le chemin singulier $x^*(t)$ soit atteint. De la même façon, si $x(0) = x_0 < x^*(0)$, alors $x(t)$ utilise le taux de croissance maximal, i.e. $\dot{x} = B(x, t)$, encore une fois jusqu'à ce que $x^*(t)$ soit atteint. Nous nommerons t_a le temps pour lequel $x(t)$ atteint $x^*(t)$.
2. D'une manière tout à fait similaire, si $x(T) = x_T \neq x^*(T)$, alors $x(t)$ est la solution de l'équation de la contrainte appropriée pour $t_b \leq t \leq T$.
3. Finalement, $x(t) = x^*(t)$ pour $t_a \leq t \leq t_b$.

La solution $x^*(t)$ de l'équation (13) est appelée la solution singulière du problème.



Graphe 1

Démonstration : La démonstration est basée sur une simple application du théorème de Green dans le plan, qui dépendra de la possibilité d'écrire la fonctionnelle objectif donnée par (10) sous la forme de l'intégrale curviligne

$$\int_0^T [G(t, x) + H(t, x)\dot{x}] dt = \int_C [G(t, x)dt + H(t, x)dx], \quad (14)$$

où C est la courbe $x = x(t), 0 \leq t \leq T$.

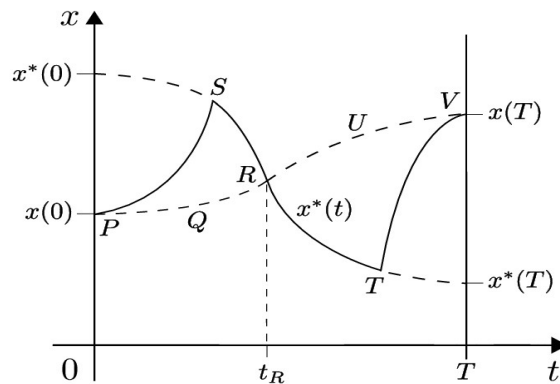
Supposons, par exemple, que la situation est telle que le décrit le Graphe 2, de sorte que la courbe continue $x(t)$ représentée par $PSRTV$ est la trajectoire optimale. Considérons une courbe $x_1(t)$ admissible de $(0, x_0)$ à (T, x_T) , représentée par des traits pointillés et vue comme étant le chemin $PQRUV$. Puisque la courbe $x(t)$ satisfait la contrainte d'égalité $\dot{x} = B(x, t)$ pour $t < t_a$, il est évident que $x_1(t) \leq x(t)$ pour $0 \leq t \leq t_a$. Supposons, comme sur le Graphe 2, que $x_1(t) < x(t)$ pour $0 < t < t_R$ où nous avons $x_1(t_R) = x(t_R)$. Alors nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_R} [G(t, x) + H(t, x)\dot{x}] dt - \int_0^{t_R} [G(t, x_1) + H(t, x_1)\dot{x}_1] dt \\ &= \int_{PSR} [G(t, x)dt + H(t, x)dx] - \int_{PQR} [G(t, x)dt + H(t, x)dx] \\ &= - \oint_{PQRS} [G(t, x)dt + H(t, x)dx] = \iint \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial t} \right) dxdt \end{aligned} \quad (15)$$

par le théorème de Green, où la double intégrale a son domaine borné par la courbe $PQRSP$. Et puisque cette région se situe au-dessous du chemin singulier $x^*(t)$, les hypothèses données par l'équation (12) impliquent que

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial t}\right) > 0 \quad (16)$$

sur la région en question. Ainsi l'intégrale ci-haut est positive, confirmant l'optimalité de la trajectoire proposée à l'intérieur de l'intervalle de temps $0 \leq t \leq t_R$, où $x_1(t) < x(t)$. Le même argument peut être étendu à l'intervalle $t_R \leq t \leq T$ ainsi qu'à toutes les configurations géométriques générées par la courbe $x(t)$ et une autre courbe admissible $x_1(t)$. La proposition est ainsi démontrée. **C.Q.F.D.**



Graphe 2

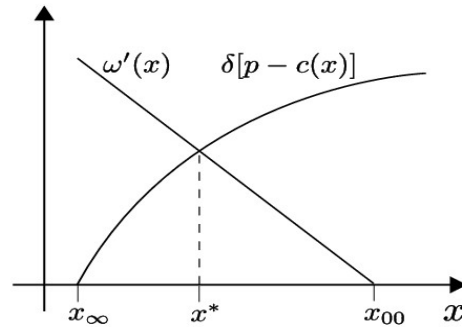
Dans le but de pouvoir se servir de la proposition précédente, trouvons le chemin singulier $x^*(t)$ qui satisfait l'équation (13), où $G(t, x)$ et $H(t, x)$ sont données par (8) et (9). Après substitution et élimination, ceci nous amène à résoudre l'équation

$$\frac{d}{dx} \{ [p - c(x)] F(x) \} = \delta [p - c(x)]. \quad (17)$$

Posons $\omega(x) = [p - c(x)] F(x)$. L'équation (3) du modèle de Schaefer nous permet d'affirmer que $d\omega/dx$ est une fonction décroissante de x puisque le signe de la dérivée seconde est alors négatif. Nous en déduisons alors que le chemin singulier $x^*(t)$ cherché est unique, comme le montre le Graphe 3. De plus, à partir de ce même graphe, il est clair que $G(t, x)$ et $H(t, x)$ données par (8) et (9) vérifient les hypothèses de la proposition précédente. Par conséquent nous pouvons dire que

1. Il existe un niveau de population équilibre x^* qui est déterminé par l'équation (13).
2. x^* est une fonction du taux d'actualisation δ et des autres paramètres économiques et biologiques du problème.
3. La valeur de x^* se situe entre les niveaux x_{00} et x_{∞} (correspondant respectivement à $\delta \rightarrow 0$ et $\delta \rightarrow \infty$).
4. Lorsque la taille de la population initiale $x(0) \neq x^*$, la politique de récolte optimale sera la politique de *l'approche la plus rapide*, i.e. diriger la taille de la population vers le niveau x^* aussi vite que possible, y rester un certain temps et finalement, à partir d'un temps τ le plus

grand possible, diriger encore une fois le plus rapidement possible la taille de la population vers le niveau x_T au temps T . Si le temps terminal $T = \infty$, alors la solution optimale consiste à aller à x^* le plus vite possible et d'y rester pour toujours.



Graphe 3

2.3 Présentation du problème général de contrôle optimal et mention du principe du maximum

Présentons maintenant une terminologie précise d'un problème général de contrôle optimal. Considérons le système de n équations d'état

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), 0 \leq t \leq T, i = 1, \dots, n. \quad (18)$$

Le vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ est appelé le vecteur d'état et chaque composante x_i est appelée variable d'état. D'une façon similaire, $u = (u_1, \dots, u_m)$ est le vecteur contrôle et chaque composante u_i est une variable de contrôle; nous supposons que chaque u_i est une fonction continue par partie du temps t . L'équation d'état (18) peut être énoncée plus simplement sous la forme vectorielle

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), 0 \leq t \leq T. \quad (19)$$

Nous supposons que nous connaissons les valeurs initiales

$$x(0) = x_0 \quad (20)$$

des variables d'état. Si, pour $0 \leq t \leq T$, U_t désigne un ensemble convexe fermé de \mathfrak{R}^m , alors le contrôle $u(t)$ est dit admissible si $u(t) \in U_t$.

Certaines des variables d'état ont aussi des conditions terminales. En changeant la numérotation des variables d'état, nous pouvons supposer qu'il en est ainsi des variables $x_1, \dots, x_k, 1 \leq k \leq n$:

$$x_i(T) = x_i^T, i = 1, \dots, k. \quad (21)$$

Un contrôle est dit réalisable s'il est admissible et que la réponse $x(t)$ satisfait aux conditions terminales. Nous introduisons finalement une fonctionnelle objectif de la forme

$$J(u) = \int_0^T f_0(x, u, t)dt + G[x(T)]. \quad (22)$$

$G[x(t)]$ est appelé le dividende terminal ; nous supposons que le temps terminal T est fixé. Il s'agit alors de trouver un contrôle optimal, i.e. un contrôle réalisable qui maximise $J(u)$ sur la classe de tous les contrôles réalisables.

Plusieurs questions peuvent se poser quant à la résolution d'un problème de contrôle optimal. La première concerne la contrôlabilité du problème, i.e. la question de l'existence d'au moins un contrôle réalisable. Au cours de ce travail, nous supposons toujours que nos problèmes sont contrôlables. Sachant qu'un problème est contrôlable, la deuxième question qui se pose concerne l'existence d'un contrôle optimal. Même si $J(u)$ est borné, ceci n'assure pas qu'il existe un contrôle optimal. Ici encore, nous supposons toujours qu'un contrôle optimal existe.

3 Les problèmes d'investissement

3.1 Modification du problème de base

Étudions ce qui survient lorsque l'investissement est un facteur irréversible du problème ainsi que les implications de ceci dans la gestion des ressources renouvelables. Supposons que

$$0 \leq E(t) \leq E_{max} = C(t), \quad (23)$$

où $C(t) :=$ montant du capital investi dans l'industrie de pêche au temps t . Des ajustements peuvent être apportés au capital selon le modèle

$$\frac{dC(t)}{dt} = I(t) - \gamma C(t), \quad (24)$$

où $I(t) :=$ taux d'investissement brut au temps t et $\gamma :=$ taux de dépréciation (constant). Posons $C(0) = C_0$. L'hypothèse de non-malléabilité est induite par la contrainte

$$0 \leq I(t) < \infty. \quad (25)$$

Le cas $I(t) = \infty$ permet d'accroître le capital d'un niveau à un autre instantanément. La fonctionnelle objectif est donnée par

$$J = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} [pr(t) - cE(t) - \pi I(t)] dt, \quad (26)$$

où $\pi :=$ prix unitaire du remplacement du capital (constant).

Le problème, qui en est un de contrôle optimal bidimensionnel linéaire, consiste à déterminer les politiques d'effort et d'investissement $E(t)$ et $I(t)$ menant à la maximisation de la fonctionnelle objectif (26).

3.2 Description du cas parfaitement malléable

Étudions tout d'abord le cas de la malléabilité parfaite, i.e. le cas où nous avons

$$-\infty < I(t) < \infty. \quad (27)$$

Sous cette hypothèse, il est clair que pour une politique optimale il n'y aura jamais de capacité de récolte excessive. En effet, il est possible d'utiliser $I(t) \rightarrow -\infty$ pour se départir de toute capacité de récolte inutilisée ; nous avons donc toujours $E(t) = C(t)$. En se servant de cette dernière relation et de l'équation (24), nous obtenons

$$I(t) = \dot{E}(t) + \gamma E(t). \quad (28)$$

Après intégration par partie, la fonctionnelle objectif devient donc

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty e^{-\delta t} [pr(t) - cE(t) - \pi\gamma E(t)] dt - \pi \int_0^\infty e^{-\delta t} \dot{E}(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\delta t} [pr(t) - cE(t) - \pi(\gamma + \delta)E(t)] dt + \pi C_0 \\ &= \int_0^\infty e^{-\delta t} [px(t) - c_T] E(t) dt + \text{constante}, \end{aligned} \quad (29)$$

où $c_T = c + \pi(\gamma + \delta) :=$ coût total par unité d'effort.

Nous remarquons que la variable C , représentant le capital, peut être éliminée entièrement du modèle et que le problème devient exactement du même type que celui étudié à la section 2. Par conséquent, nous savons qu'il existe une taille de population singulière optimale $x(t) = \bar{x}$ telle que

$$\frac{d}{dx} \{ [p - c_T(\bar{x})] F(\bar{x}) \} = \delta [p - c_T(\bar{x})], \quad (30)$$

où $c_T(x) := c_T/x$.

La solution optimale est donc du type « bang-bang » et elle consiste à utiliser « l'approche la plus rapide » telle que déjà mentionnée. Notons que \bar{x} est unique et que $x^* < \bar{x}$ puisque $c_T > c$ (il suffit de remarquer l'évolution des courbes du Graphe 3 lorsque le paramètre c varie).

3.3 Description du cas quasi malléable

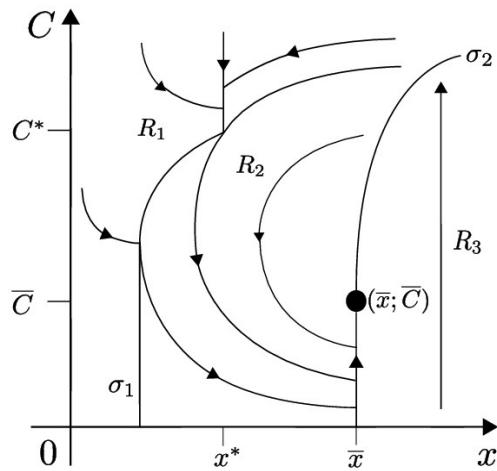
Donnons maintenant la description de la solution optimale pour le cas où le capital est quasi malléable, i.e. $\gamma > 0$ et $0 \leq I(t) < \infty$. Voyons le Graphe 4 qui consiste en un diagramme de rétro-contrôle (feedback) dans le plan-état $(x; C)$ de la politique optimale (récolte ; investissement) pour ce cas particulier (où $C^* = F(x^*)/x^*$ et $\bar{C} = F(\bar{x})/\bar{x}$).

Les flèches dans le graphe 4 montrent les trajectoires d'un système (taille de la population ; capital) contrôlé de façon optimale. Il y a trois classes de politique optimale :

$$R_1 : E = I = 0 \quad (31)$$

$$R_2 : E = E_{max} = C, I = 0 \quad (32)$$

$$R_3 : I = \infty. \quad (33)$$



Graphe 4

Dû au fait que $\gamma > 0$, le système tend vers un unique point d'équilibre à long terme $(\bar{x}; \bar{C})$. Appelons $S(x; C)$ la fonction représentant le revenu provenant de la politique indiquée par le Graphe 4 appliquée au point $(x; C)$ à partir du temps $t = 0$. La courbe σ_2 est alors déterminée par

$$\frac{\partial S(x; C)}{\partial C} = \pi. \quad (34)$$

L'équation (34) signifie que, sur σ_2 , la valeur actuelle des revenus acquis suite à l'acquisition d'une unité supplémentaire du capital est égale au prix unitaire de remplacement du capital. De façon similaire, la courbe d'échange σ_1 est donnée par

$$\frac{\partial S(x; C)}{\partial x} = p - c/x. \quad (35)$$

4 Analyse agent-principal (biniveaux) d'un problème d'optimisation

4.1 Présentation du nouveau problème et théorie agent-principal

Un des problèmes de gestion que les états côtiers doivent résoudre concerne la détermination des relations économiques, s'il doit y en avoir, qui doivent être établies par ceux-ci avec les nations de pêche éloignées qui désirent récolter à l'intérieur de leur zone économique exclusive (Z.E.E).

Nous supposons que l'objectif de l'état côtier consiste à maximiser ses revenus provenant des nations de pêche éloignées dans le temps. L'état côtier établit ainsi une stratégie (ensemble de taxes : $m :=$ taxe sur la récolte et $n :=$ taxe sur l'effort) pour laquelle la nation de pêche éloignée doit répondre par une action (l'action prend la forme d'une politique d'effort $E(t)$). Il s'agit d'un problème d'analyse de relation agent-principal (de type biniveaux), où l'état côtier constitue le principal et la nation de pêche éloignée représente l'agent.

Le principal choisit une stratégie π qui détermine, avec l'action γ que choisit l'agent, la rémunération reçue par l'agent, notée $R_A(\pi, \gamma)$, ainsi que le revenu acquis par le principal, noté $R_P(\pi, \gamma)$. Nous distinguons les deux situations suivantes :

Situation idéale-1 : Le principal contrôle parfaitement l'action de l'agent.

Situation idéale-2 : Le principal ne peut qu'influencer l'action de l'agent.

Dans le premier cas, le problème du principal consiste à choisir π et γ de façon à maximiser $R_P(\pi, \gamma)$. De plus, π et γ doivent être tels que la rémunération de l'agent soit au moins égale à un certain coût d'opportunité L , i.e. $R_A(\pi, \gamma) \geq L$ avec $\pi \in \Pi$ et $\gamma \in \Gamma$, où Π et Γ sont les ensembles réalisables des stratégies et des actions (respectivement). Le revenu optimal du principal est alors donné par

$$I_1 := \max_{\pi \in \Pi, \gamma \in \Gamma} \{R_P(\pi, \gamma) : R_A(\pi, \gamma) \geq L\}. \quad (36)$$

Dans la situation idéale-2, l'agent choisit toujours γ dans le but de maximiser $R_A(\pi, \gamma)$ sur Γ (la stratégie π étant donnée). Le revenu optimal du principal dans cette situation est donné par

$$I_2 := \max_{\pi \in \Pi} \left\{ R_P(\pi, \gamma) : R_A(\pi, \gamma) = \max_{\bar{\gamma} \in \Gamma} R_A(\pi, \bar{\gamma}) \geq L \right\}. \quad (37)$$

La différence $(I_1 - I_2) \geq 0$ est appelée « la différence stratégique ». Les fonctions revenu de l'agent et du principal sont respectivement

$$R_A(m, n, E) = \int_0^\infty e^{-\delta_A t} [(p - m)x(t) - (c + n)] E(t) dt \quad (38)$$

$$R_P(m, n, E) = \int_0^\infty e^{-\delta_P t} [mx(t) + n] E(t) dt, \quad (39)$$

où $\delta_A :=$ taux d'actualisation de l'agent

et $\delta_P :=$ taux d'actualisation du principal.

4.2 Étude d'une situation idéale-1 avec $\delta_A = \delta_P = \delta$

Selon l'équation (39), le revenu optimal I_1 du principal est obtenu en maximisant

$$R_P(m, n, E) = \int_0^\infty e^{-\delta t} [px(t) - c] E(t) dt - \int_0^\infty e^{-\delta t} [(p - m)x(t) - (c + n)] E(t) dt. \quad (40)$$

L'état côtier peut manipuler m et/ou n de manière à ce que $R_A = L$ soit vérifiée. La première expression du membre de droite dans (40) représente la valeur actuelle des revenus provenant de la Z.E.E. Il s'agit de maximiser cette valeur actuelle. Appelons V_0 cette valeur actuelle maximale. Nous avons alors $I_1 = V_0 - L$. Pour que le problème soit intéressant pour le principal, nous devons avoir $V_0 \geq L$. Dans la suite du problème nous supposons toujours que $V_0 \geq L$. Ce problème coïncide précisément avec le problème de base étudié à la section 2. La solution optimale est par conséquent un mélange de contrôle « bang-bang » et de contrôle singulier, tel que mentionné précédemment, dont la population d'équilibre x^* vérifie l'équation (17), et nous obtenons

$$F'(x) + \frac{\frac{c}{x^2} F(x)}{p - \frac{c}{x}} = \delta. \quad (41)$$

4.3 Étude d'une situation idéale-2 avec $\delta_A = \delta_P = \delta$

Le problème de l'agent consiste à maximiser (38) (en posant $\delta_A = \delta$). C'est encore un problème du type du problème de base. Ainsi, l'effort de récolte optimal $E(t)$ est tel qu'il dirige la taille de la population à atteindre vers un état d'équilibre x_A qui vérifie l'équation

$$F'(x) + \frac{\frac{(c+n)}{x^2}F(x)}{(p-m) - \frac{(c+n)}{x}} = \delta. \quad (42)$$

Du point de vue de l'état côtier et suite à la discussion concernant le cas d'une situation idéale-1, deux conditions doivent être satisfaites si nous ne voulons pas avoir de différence stratégique :

1. $R_A = L$;
2. La stratégie choisie doit maximiser la valeur actuelle des revenus provenant de la Z.E.E.

Si l'état côtier choisissait une stratégie où $m = 0$ et/ou $n = 0$, alors nous aurions nécessairement $(I_1 - I_2) > 0$. En effet, si $m = n = 0$, alors nous avons (par hypothèse),

$$R_A(m, n, E) = R_A(0, 0, E) = V_0 > L. \quad (43)$$

La première condition n'est donc pas respectée et il se crée une différence stratégique.

Considérons ensuite le cas où $m > 0$ et $n = 0$ (l'état impose une taxe sur la récolte mais aucune sur l'effort). La taille de la population d'équilibre x_A est maintenant solution de l'équation

$$F'(x) + \frac{\frac{c}{x^2}F(x)}{(p-m) - \frac{c}{x}} = \delta \quad (44)$$

et, en comparant les équations (41) et (44), nous remarquons le fait que pour tout $x > 0$ il est vrai que

$$\frac{\frac{c}{x^2}F(x)}{(p-m) - \frac{c}{x}} > \frac{\frac{c}{x^2}F(x)}{p - \frac{c}{x}}, \quad (45)$$

d'où il suit que

$$F'(x^*) + \frac{\frac{c}{(x^*)^2}F(x^*)}{(p-m) - \frac{c}{x^*}} > \delta, \quad (46)$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{dx} \{ [p - c(x)] F(x) \} > \delta [p - c(x)] \text{ lorsque } x = x^*. \quad (47)$$

Et, tel que l'indique le Graphe 3, nous constatons que cette dernière relation n'est possible que si $x_A > x^*$. La condition 2 précédente n'est par conséquent pas satisfaite et nous avons alors $R_P < V_0 - L$. À noter que la relation $x_A > x^*$ peut aussi être déduite à l'aide du Graphe 3 en analysant l'allure des courbes lorsque le prix diminue. Le cas $m = 0$ et $n > 0$ donne un résultat similaire.

Si la stratégie du principal est une combinaison des deux taxes, alors la condition 1 implique que nous devons avoir

$$F'(x^*) + \frac{\frac{(c+n)}{(x^*)^2} F(x^*)}{(p-m) - \frac{(c+n)}{x^*}} = \delta, \quad (48)$$

signifiant que la taille de la population d'équilibre x^* solution de (41) doit aussi satisfaire (42). Des équations (41) et (48) nous obtenons l'équation

$$\frac{\frac{(c+n)}{(x^*)^2} F(x^*)}{(p-m) - \frac{(c+n)}{x^*}} = \frac{\frac{c}{(x^*)^2} F(x^*)}{p - \frac{c}{x^*}}. \quad (49)$$

L'équation (49) nous assure que $x_A = x^*$ et

$$\frac{p-m}{c+n} = \frac{p}{c}. \quad (50)$$

Cette dernière équation suggère que la stratégie optimale est une combinaison d'une taxe et d'une subvention. Et puisque nous désirons obtenir $R_A = L$, nous devons avoir $m > 0$ et $n < 0$. En effet, de l'équation (50) nous pouvons poser

$$R_A(m, n, E) = \omega \int_0^\infty e^{-\delta t} \left[\frac{p}{c} x(t) - 1 \right] E(t) dt, \quad (51)$$

où $\omega = (c+n)$. Supposons $n > 0$ tel que $(c+n) = \theta c$ avec $\theta > 1$. Alors $R_A = \theta V_0$ et ainsi $R_A > V_0$, ce qui est impossible. Mais si $m > 0$, alors nous avons $(c+n) = \theta c$ avec $\theta < 1$ et alors $R_A = \theta V_0$, i.e. $R_A < V_0$. Finalement, si n est choisi tel que $\theta = L/V_0$, alors $R_A = L$. Nous obtenons $m^* = \sigma p$ et $n^* = -\sigma c$, où m^* et n^* représentent les deux taxes optimales et $\sigma = (V_0 - L)/V_0$.

5 Conclusion

Nous avons résumé, à l'intérieur de cet article, divers problèmes de modélisation et de contrôle optimal qui ont été étudiés par Clark, Clarke et Munro concernant la gestion d'une ressource renouvelable. D'une simple application du théorème de Green dans le plan à une étude agent-principal en passant par la présentation de problèmes d'investissement, cet article propose un tutoriel qui permet au lecteur d'acquérir des connaissances avancées en optimisation.

Références

- [1] C.W. Clark. *Mathematical Bioeconomics : The Optimal Management of Renewable Ressources*. Wiley-Interscience, New York, 1976.
- [2] C.W. Clark, F.H. Clarke, and G.R. Munro. The optimal exploitation of renewable resources stocks : Problems of irreversible investment. *Econometrica*, 47 :25-47, 1979.
- [3] F.H. Clark. *Lecture Notes in the Calculus of Variations and Optimal Control*. University of British-Columbia.

- [4] F.H. Clarke. Applying abstract control theory to concrete models : a casebook. *American Mathematical Society, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, 32 : 55-73, 1985.
- [5] F.H. Clarke. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. Les Publications du CRM, Université de Montréal, Montréal, 1989.
- [6] F.H. Clarke and G.R. Munro. Coastal states, distant water fishing nations and extended jurisdiction : A principal agent analysis. *Natural Resource Modelling*, 2(1) :81-107, 1987.
- [7] F.H. Clarke and G.R. Munro. Coastal states, distant water fishing nations : Conflicting views of the future. *Natural Resource Modelling*, 5(3), 1991.
- [8] L.S. Pontryagin, R.V. Gamkrelidze, and E.F. Mischenk. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. John Wiley, New York, 1962.
- [9] M.B. Schaefer. Some considerations of population dynamics and economics in relation to the management of marine fisheries. *Journal of The Fisheries Research Board of Canada*, 14 :669-681, 1957.

