Symétries et solutions invariantes d'équations d'un modèle de la plasticité

Vincent Lamothe,
Département de mathématiques et statistique,
Université de Montréal

Résumé

La méthode de réduction par symétrie est systématiquement appliquée à un système d'équations décrivant un écoulement planaire d'un matériau plastique idéal. Une classification des sous-algèbres des symétries ponctuelles de Lie fournit un outil pour introduire des variables de symétrie et réduire le système initial à différents systèmes d'équations différentielles ordinaires. Ces systèmes réduits admettent des classes de nouvelles solutions invariantes. Certaines conséquences physiques et mathématiques seront discutées.

1 Introduction

L'utilisation de la méthode de réduction par symétrie (telle que présentée par exemple par Winternitz [3]), consiste à trouver le groupe de Lie de transformations ponctuelles de symétrie d'un système d'équations différentielles, puis à trouver des solutions invariantes sur certains sous-groupes de transformations. Pour ce faire, on utilise l'algèbre de Lie des générateurs infinitésimaux des transformations dont on classifie les sous-algèbres. On trouve ensuite les invariants correspondant à une sous-algèbre, ce qui permet d'effectuer un changement de variables que l'on introduit dans le système initial pour obtenir un système d'équations différentielles réduit en nombre de variables.

Le système d'équations aux dérivées partielles à l'étude s'exprime en deux variables indépendantes x, y plus quatre variables dépendantes u, v, σ, θ. Ce système, connu dans la littérature (voir par exemple Katchanov [1]), décrit l'écoulement planaire d'un matériau plastique idéal et prend la forme

$$\begin{cases} \sigma_x - 2k\left(\theta_x \cos(2\theta) + \theta_y \sin(2\theta)\right) = 0, \\ \sigma_y - 2k\left(\theta_x \sin(2\theta) - \theta_y \cos(2\theta)\right) = 0, \\ (u_y + v_x)\sin(2\theta) + (u_x - v_y)\cos(2\theta) = 0, \\ u_x + v_y = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où on utilise la notation $u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x}$, etc. Dans le système (1), les fonctions $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont les composantes de la vitesse selon l'axe des x et l'axe des y respectivement. Les fonctions $\sigma(x,y)$ et

$\theta(x,y)$ définissent le tenseur symétrique des contraintes dont les composantes sont

$$\sigma_{11} = \sigma - k\sin(2\theta), \qquad \sigma_{22} = \sigma + k\sin(2\theta), \qquad \sigma_{12} = k\cos(2\theta). \tag{2}$$

La quantité k, appelée coefficient de compression volumique, est une constante positive associée au matériau et s'exprime en terme du coefficient de Poisson ν et du module de Young. Plus précisément, la fonction $\sigma(x,y)$ représente la pression moyenne, tandis que $\theta(x,y)$ représente l'angle entre l'axe des x et la direction de la contrainte principale de plus grand module, et duquel on retire $\pi/4$. Les deux premières équations sont les équations d'équilibre pour une déformation planaire. La troisième équation est l'équation de la plasticité de Von Mises reliant la vitesse des particules du matériau à la contrainte, par l'entremise de l'angle $\theta(x,y)$. La dernière équation correspond à l'hypothèse d'incompressibilité du matériau. L'absence d'une variable temporelle dans (1) provient du fait qu'à des températures ambiantes la déformation des matériaux plastiques ne dépend essentiellement pas du temps (si les forces externes appliquées sont constantes).

2 Méthode de classification des sous-algèbres

Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie de dimension finie et soit G un groupe d'automorphisme de $\mathcal{L}$. Un groupe d'automorphisme de $\mathcal{L}$ est un groupe tel que $G\mathcal{L}G^{-1} = \mathcal{L}$. Le but visé est d'obtenir une liste K de sous-algèbres $\mathcal{L}_i \subset \mathcal{L}$ construites de telle manière que n'importe quelle sous-algèbre de $\mathcal{L}$ soit conjuguée sous G à une unique sous-algèbre de la liste K. Deux sous-algèbres $\mathcal{L}_i$ et $\mathcal{L}'_i$ sont conjuguées l'une à l'autre si $G\mathcal{L}_iG^{-1} = \mathcal{L}'_i$.

L'algèbre de symétrie d'un système d'équations différentielles peut être une algèbre simple. Si elle n'est pas simple, elle peut être décomposée soit en une somme directe de sous-algèbres $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$, soit en une somme semi-directe de sous-algèbres $\mathcal{L} = \mathcal{F} \niplus \mathcal{N}$, où $[\mathcal{F},\mathcal{F}] \subseteq \mathcal{F}$, $[\mathcal{N},\mathcal{N}] \subseteq \mathcal{N}$, $[\mathcal{F},\mathcal{N}] \subseteq \mathcal{N}$, $\mathcal{F} \neq 0$ et $\mathcal{N} \neq 0$. Il est à noter que la décomposition de Levi $\mathcal{L} = \mathcal{F} \niplus \mathcal{R}$, où $\mathcal{R}$ est le radical de $\mathcal{L}$, est toujours possible pour une algèbre qui n'est pas une algèbre simple.

Pour une algèbre $\mathcal{L}$ qui est une

- **algèbre simple.** Une algèbre est simple si elle est indécomposable en une somme directe ou semi-directe, autrement dit si elle ne contient aucune sous-algèbre idéale non triviale. Pour classifier une sous-algèbre simple $\mathcal{L}$, il faut trouver toutes les sous-algèbres maximales. Une sous-algèbre $\mathcal{L}_M \subset \mathcal{L}$ est dite maximale si $\mathcal{L}_M \subseteq \tilde{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{L}$, $[\mathcal{L}_M, \mathcal{L}_M] \subseteq \mathcal{L}_M$, $\left[\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\mathcal{L}}\right] \subseteq \tilde{\mathcal{L}}$, ce qui implique que $\mathcal{L}_m = \tilde{\mathcal{L}}$ ou que $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$.
- **une somme directe de sous-algèbres.** Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie de dimension finie pouvant se décomposer en la somme directe $\mathcal{L} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$, $\dim \mathcal{A} = n_a$, $\dim \mathcal{B} = n_b$, où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ne sont pas nécessairement indécomposables. L'objectif est de classifier les sous-algèbres de $\mathcal{L}$ en classes de conjuguaison sous le groupe $G = G_{\mathcal{A}} \otimes G_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{A} = \exp\{A\}$, $\mathcal{B} = \exp\{B\}$.
  i) **Les sous-algèbres « nontwisted ».** Une sous-algèbre nontwisted est une sous-algèbre conjuguée à une somme directe $\mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{B}_0$ d'une sous-algèbre $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ avec une sous-algèbre $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$.

ii) **Les sous-algèbres « twisted ».** Ce sont les sous-algèbres qui ne peuvent pas être conjuguées à des sous-algèbres de type nontwisted.

- **une somme semi-directe de sous-algèbres.** Soit une algèbre $\mathcal{L}$ décomposée en une somme semi-directe, c'est-à-dire $\mathcal{L} = \mathcal{F} \niplus \mathcal{N}$, où $\mathcal{N} \subset \mathcal{L}$ est une sous-algèbre idéale et $\mathcal{F}$ une sous-algèbre facteur. Deux types de sous-algèbres sont possibles.

i) **Les sous-algèbres « splitting ».** Les sous-algèbres splitting sont les sous-algèbres de la forme $\mathcal{F}_0 \niplus \mathcal{N}_0$, avec $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ une sous-algèbre facteur et $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{F}$ un idéal.

ii) **Les sous-algèbres « non-splitting ».** Les sous-algèbres non-splitting sont les sous-algèbres qui ne sont conjuguées à aucune sous-algèbre splitting.

La procédure pour classifier les algèbres des trois types mentionnés ci-haut est présentée dans [3].

3 L'algèbre de symétrie pour le problème d'écoulement planaire

Afin de pouvoir effectuer les réductions par symétrie, il faut d'abord trouver le groupe de symétrie ponctuelle G du système (1) et son algèbre $\mathcal{L}$, ce qui peut être fait en utilisant les techniques présentées dans [2]. L'algèbre de symétrie du système (1) est engendrée par les huits générateurs

$$\begin{gathered} D_1 = x\partial_x + y\partial_y, \qquad D_2 = u\partial_u + v\partial_v, \qquad L = -y\partial_u + x\partial_v, \\ P_1 = \partial_x, \qquad P_2 = \partial_y, \qquad P_3 = \partial_\sigma, \qquad P_4 = \partial_u, \qquad P_5 = \partial_v. \end{gathered} \tag{3}$$

Les vecteurs D_1 et D_2 sont des dilatations, les P_i, $i = 1, \ldots, 5$ sont des translations et L est un « boost » de type galiléen. La table de commutation est donnée à la table 1.

TAB. 1 – Relations de commutation de l'algèbre $\mathcal{L}$.

$\mathcal{L}$	D_1	D_2	L	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
D_1	0	0	L	$-P_1$	$-P_2$	0	0	0
D_2	0	0	$-L$	0	0	0	$-P_4$	$-P_5$
L	$-L$	L	0	$-P_5$	P_4	0	0	0
P_1	P_1	0	P_5	0	0	0	0	0
P_2	P_2	0	$-P_4$	0	0	0	0	0
P_3	0	0	0	0	0	0	0	0
P_4	0	P_4	0	0	0	0	0	0
P_5	0	P_5	0	0	0	0	0	0

Notons l'algèbre de symétrie par $\mathcal{L} = \{D_1, D_2, L, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$. Le plus simple est de décomposer d'abord en somme directe si c'est possible. Ici, ce l'est de la façon suivante : $\mathcal{L} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$, où $\mathcal{A} = \{D_1, D_2, L, P_1, P_2, P_4, P_5\}$ et $\mathcal{B} = \{P_3\}$. Avant d'effectuer la procédure pour une somme directe, il faut classifier les sous-algèbres $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Pour ce faire, on décompose $\mathcal{A}$ comme suit : $\mathcal{A} = \mathcal{F} \niplus \mathcal{N}$, avec $\mathcal{F} = \{D_1, D_2, L\}$ et $\mathcal{N} = \{P_1, P_2, P_4, P_5\}$. Finalement, $\mathcal{F} = \{D_1, D_2\} \niplus \{L\}$, où la classification de la sous-algèbre abélienne $\{D_1, D_2\}$ est triviale. Ainsi, on procède d'abord en classifiant la sous-algèbre $\mathcal{F}$ de la manière expliquée précédemment. On continue ensuite avec la classification de

$\mathcal{F} \ni \mathcal{N}$ et puis en classifiant la somme directe $\{A\} \oplus \{B\}$. Les résultats finaux sont présentés aux tables 2 et 3 en annexe. La décomposition est donnée par

$$\mathcal{L} = [(\{D_1, D_2\} \ni \{L\}) \ni \{P_1, P_2, P_4, P_5\}] \oplus \{P_3\}\,.$$

4 Solutions G-invariantes

Seules les sous-algèbres de dimension 1 peuvent conduire à des réductions par symétries puisque le système d'équations aux dérivées partielles considéré ne fait intervenir que deux variables indépendantes ; donc dans le cas présent le système (1) se réduira à un système d'équations différentielles ordinaires. Les sous-algèbres qui donneront des réductions intéressantes doivent être un générateur qui contient au moins une dérivée partielle par rapport à une variable indépendante, de façon à pouvoir obtenir une dite variable de symétrie, i.e. que dans le cas présent elle doit contenir un terme avec au moins l'un des trois générateurs de base P_1, P_2 ou D_1. De plus, elle doit contenir un terme en P_3, sinon σ peut être pris comme invariant et il est alors toujours possible de prendre une combinaison appropriée des deux premières équations, de sorte qu'aucune dérivée de σ n'apparaisse dans l'équation résultante, ce qui forcera la solution pour $\theta(x, y)$ à être constante. La sous-algèbre doit aussi contenir une dérivée en $\frac{\partial}{\partial u}$ ou $\frac{\partial}{\partial v}$, sinon nous obtiendrons une solution avec les vitesses u et v constantes.

Pour chaque classe de sous-algèbres pertinentes, nous donnons un générateur la représentant, les invariants associés à ce générateur, le système réduit obtenu à partir de ceux-ci ainsi que la solution. Nous notons par ξ la variable de symétrie utilisée. Dans ce qui suit, nous utilisons les notations $\varepsilon = \pm 1$, $a, s \in \mathbb{R}$ avec $s \neq 0$. Les constantes d'intégration sont notées par les symboles c_i. Nous présentons ci-dessous certains résultats groupés selon la valeur de la variable de symétrie ξ.

1. Pour le premier groupe de solutions, la variable de symétrie est $\xi = x$.
   a) $\{P_2 + P_5 + \varepsilon P_3\}$: Les invariants sont :

   $$u = F(\xi), \qquad G(\xi) = v - y, \qquad H(\xi) = \sigma - \varepsilon y, \qquad J(\xi) = \theta.$$

   Solution :

   $$\begin{aligned} u(x,y) &= -x + c_1, \\ v(x,y) &= y + 2\varepsilon\sqrt{k^2 - (x + c_4)^2}, \\ \sigma(x,y) &= \varepsilon y + \sqrt{k^2 - (x + c_4)^2}, \\ \theta(x,y) &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{\varepsilon(x + c_4)}{k}\right), \end{aligned} \tag{4}$$

   où on doit avoir $|x + c_4| < k$. Pour toute valeur de x vérifiant la précédente inégalité, la solution est réelle et elle est aussi bornée pour autant que les valeurs de y où l'on évalue la solution soient finies.

   b) $\{L + \varepsilon P_2 + P_3\}$: Les invariants sont :

   $$F(\xi) = u + \frac{\varepsilon y^2}{2}, \qquad G(\xi) = v - \varepsilon x y, \qquad H(\xi) = \sigma - \varepsilon y, \qquad J(\xi) = \theta.$$

Solution :

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= -\varepsilon\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)+c_1,\\
v(x,y) &= \varepsilon xy+(x+\varepsilon c_4)\sqrt{k^2-(x-\varepsilon c_4)^2}-k^2\arctan\left(\frac{x-\varepsilon c_4}{\sqrt{k^2-(x-\varepsilon c_4)^2}}\right)+c_2,\\
\sigma(x,y) &= \varepsilon y+\sqrt{k^2-(x-\varepsilon c_4)^2},\\
\theta(x,y) &= \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{c_4-\varepsilon x}{k}\right),
\end{aligned}\tag{5}$$

où on doit avoir $|x-\varepsilon c_4|<k$. Sur cet intervalle pour x et pour $|y|<\infty$, la solution est réelle et bornée.

2. Considérons les solutions associées à la variable de symétrie $\xi = ax-y$. En interprétant y comme le temps, ces solutions peuvent être vues comme des ondes de propagation.

a) $\{P_1+aP_2+P_4+\varepsilon P_3\}$: Les invariants sont :

$$F(\xi)=u-x,\qquad G(\xi)=v,\qquad H(\xi)=\sigma-\varepsilon x,\qquad J(\xi)=\theta.$$

Solution :

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= x-\frac{(a^3+3a)\mu+\sqrt{|\lambda|^2-\mu^2}}{(a^2+1)^2}+c_1,\\
v(x,y) &= -\frac{(a^2-1)\mu+2\varepsilon_1 a\sqrt{|\lambda|^2-\mu^2}}{(a^2+1)^2}+c_2,\\
\sigma(x,y) &= \varepsilon x-\frac{\varepsilon_1 k(a\alpha+\beta)\sqrt{|\lambda|^2-\mu^2}}{|\lambda|^2}+\left(\frac{k}{|\lambda|^2}\right)(a\beta-\alpha)\mu+c_3,\\
\theta(x,y) &= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\alpha\mu+\varepsilon_1\beta\sqrt{|\lambda|^2-\mu^2}}{\beta\mu-\varepsilon_1\alpha\sqrt{|\lambda|^2-\mu^2}}\right),
\end{aligned}\tag{6}$$

où

$$\mu=ax-y+c_4,\qquad \alpha=2ka\varepsilon,\qquad \beta=-k\varepsilon(a^2-1),\qquad \varepsilon_1=\pm1,\qquad |\lambda|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.$$

On doit avoir $\tan(2\theta)\neq\frac{\alpha}{\beta}$ et x,y sont tels que

$$0<\beta(ax-y+c_4)-\varepsilon_1\alpha\sqrt{|\lambda|^2-(ax-y+c_4)^2}<|\lambda|^2.$$

Sur la région définie par cette dernière inégalité, la solution est réelle et bornée.

b) $\{D_2+P_1+aP_2+sP_3\}$: Les invariants sont :

$$F(\xi)=e^{-x}u,\qquad G(\xi)=e^{-x}v,\qquad H(\xi)=\sigma-sx,\qquad J(\xi)=\theta.$$

Solution :

$$\begin{aligned}
u(x,y) =&e^x f(\mu)\exp\int U(\mu)d\mu,\\
v(x,y) =&-2e^x\left((F(\mu)+aF'(\mu))\cot(2J(\mu))-aF(\mu)-(1+a^2)F'(\mu)\right),\\
\sigma(x,y) =&sx+\frac{\varepsilon\, sng(\beta)k}{|\lambda|^2}\left((a\alpha+\beta)\sqrt{|\lambda|^2-\mu^2}-\varepsilon\left(sng(\beta)\alpha-a|\beta|\right)\mu\right)+c_3,,\\
\theta(x,y) =&\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\alpha\mu+\varepsilon\beta\sqrt{|\lambda|^2-\mu}}{\beta\mu-\varepsilon\alpha\sqrt{|\lambda|^2-\mu^2}}\right),
\end{aligned}$$

où $\mu = ax - y + c_4$, $f(\mu) = -\delta e^{-1/2\int \frac{B(\mu)}{A(\mu)}d\mu}$, $\delta \neq 0$ étant une constante arbitraire, et où la fonction U doit satisfaire l'équation de Ricatti

$$U' + U^2 = -\frac{f' + \frac{B}{A} + \frac{C}{A}}{f},$$

les fonctions A, B, C étant définies par

$$A(\mu) = -2a\cot(2J(\mu)) - (a^2+1), \qquad B(\mu) = 2\left(-\cot(2J(\mu)) + 2a\csc^2(2J(\mu))J'(\mu) - a\right),$$

$$C(\mu) = -1 + 4\csc^2(2J(\mu))J'(\mu).$$

Les valeurs des différentes constantes apparaissant dans la précédente solution sont :

$$\alpha = \frac{2ka}{s}, \qquad \beta = -k(a^2-1), \qquad |\lambda| = \frac{k}{|s|}(a^2+1),$$

où l'identité $\alpha^2 + \beta^2 = |\lambda|^2$ a toujours lieu. Le domaine de définition de la solution est donné par l'inégalité

$$|ax - y + c_4| < |\lambda|.$$

À l'intérieur de ce domaine, la solution est réelle et bornée.

3. $\{L + \varepsilon P_1 + aP_2 + P_3\}$: La variable de symétrie est $\xi = ax - \varepsilon y$. Les invariants sont :

$$F(\xi) = u - \frac{ax^2}{2} + \varepsilon xy, \qquad G(\xi) = \frac{\varepsilon x^2}{2}, \qquad H(\xi) = \sigma - \varepsilon x, \qquad J(\xi) = \theta.$$

Solution :

$$\begin{aligned}
u(x,y) =& \frac{ax^2}{2} - \varepsilon xy + \frac{1}{2}\frac{a+2\varepsilon}{a^2-2\varepsilon a-1}\left((ax-\varepsilon y)^2 - c_4^2\right) + c_1,\\
v(x,y) =& \frac{\varepsilon x^2}{2} - \frac{\varepsilon}{a^2-2\varepsilon a-1}\left((ax-\varepsilon y)^2 - c_4^2\right) + c_2,\\
\theta(x,y) =& \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2a\varepsilon(ax-\varepsilon y+c_4) + \tilde{\varepsilon}(a^2-1)\sqrt{k^2(a^2+1)^2 - (ax-\varepsilon y+c_4)^2}}{-(a^2-1)(ax-\varepsilon y+c_4) - 2\varepsilon\tilde{\varepsilon}a\sqrt{k^2(a^2+1)^2-(ax-\varepsilon y+c_4)^2}}\right),\\
\sigma(x,y) =& \varepsilon x - \frac{1}{k^2(a^2+1)^3}\\
&\left(a(\varepsilon ax - y + \varepsilon c_4) + \tilde{\varepsilon}\sqrt{k^4(a^2+1)^4 - a^2x^2 + 2\varepsilon axy - 2axc_4 - y^2 + 2\varepsilon c_4 y - c_4^2}\right) + c_3,
\end{aligned}$$

où $\tilde{\varepsilon} = \pm 1$, c_1, c_2, c_3 et c_4 sont des paramètres libres et

$$\theta(x,y) \neq \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2a}{a^2-1}\right).$$

De plus, on doit avoir

$$|ax - \varepsilon y + c_4| < k(a^2+1),$$

$$2ka\varepsilon(ax-\varepsilon y+c_4) - \tilde{\varepsilon}k(a^2-1)\sqrt{k^2(a^2+1)-(ax-\varepsilon y+c_4)^2} \neq 0$$

et

$$0 < -(a^2-1)(ax-\varepsilon y+c_4) - \tilde{\varepsilon}2a\varepsilon\sqrt{k^2(a^2+1)-(ax-\varepsilon y+c_4)^2} < (a^2+1).$$

4. Pour la suite, la variable de symétrie est $\xi = \frac{y}{x}$. Ces solutions correspondent à des transformations de similarité.

a) $\{D_1 + \gamma D_2 + sP_3\}$: Les invariants sont :

$$F = x^{\gamma} u, \qquad J = \theta, \qquad G = x^{\gamma} v, \qquad H = \sigma - s \ln(x).$$

On assume $x \neq 0$. La solution pour $J(\xi)$ est donnée implicitement par

$$\frac{2s \tan^{-1}\left(\frac{2s\xi + k\sin(4J(\xi))\xi + k\cos(4J(\xi))}{\sqrt{4s^2-k^2}}\right)}{\sqrt{4s^2-k^2}} + 2\left(J(\xi) - \frac{s\tan^{-1}\left(\frac{k+2s\tan(2J(\xi))}{\sqrt{4s^2-k^2}}\right)}{\sqrt{4s^2-k^2}}\right) = c_1, \tag{7}$$

puis, si l'on trouve $J(\xi)$ explicitement, on obtient par quadrature

$$H(\xi) = \int \left(\frac{(\sin(2\,J(\xi))\,\xi + \cos(2\,J(\xi)))\,s}{2\,\cos(2\,J(\xi))\,\xi - \sin(2\,J(\xi)) + \sin(2\,J(\xi))\,\xi^2}\right) d\xi + c_2. \tag{8}$$

La fonction $F(\xi)$ doit obéir à l'équation différentielle ordinaire du second ordre

$$\begin{aligned}&\left(\left(1-\xi^2\right)\sin(2\,J(\xi)) - 2\,\cos(2\,J(\xi))\,\xi\right)\sin(2\,J(\xi))\,\frac{d^2}{d\xi^2}F(\xi)\\ &\quad + \left(2\,(\gamma-1)\,\xi\,\left(\sin(2\,J(\xi))\right)^2 + 4\left(\frac{d}{d\xi}J(\xi)\right)\xi + 2\,(\gamma-1)\sin(2\,J(\xi))\cos(2\,J(\xi))\right)\frac{d}{d\xi}F(\xi)\\ &\quad + F(\xi)\,\gamma^2\left(\sin(2\,J(\xi))\right)^2 + \left(\sin(2\,J(\xi))\right)^2 F(\xi)\,\gamma - 4\left(\frac{d}{d\xi}J(\xi)\right)F(\xi)\,\gamma = 0.\end{aligned}$$

Finalement, si $F(\xi)$ est obtenue, alors nous avons $G(\xi)$ par quadrature

$$G(\xi) = \int \left[-F(\xi)\,\gamma + \left(\frac{d}{d\xi}F(\xi)\right)\xi\right] d\xi.$$

Les solutions sont obtenues en substituant F, G, H, J dans les équations respectives définissant les invariants.

b) $\{D_1 + D_2 + L + sP_3\}$: Les invariants sont :

$$F = \frac{u + y\ln(x)}{x}, \qquad G = \frac{v - x\ln(x)}{x}, \qquad H = \sigma - s\ln(x), \qquad J = \theta.$$

La solution pour $J(\xi)$ est donnée implicitement par (7) et celle pour $H(\xi)$ par (8). La fonction $F(\xi)$ doit obéir à l'équation différentielle ordinaire du second ordre

$$\begin{aligned}&\left(-2\,\frac{\cos(2\,J(\xi))\,\xi}{\sin(2\,J(\xi))} + 1 - \xi^2\right)\frac{d^2}{d\xi^2}F(\xi) + \left(4\,\xi + 4\,\frac{\left(\cos(2\,J(\xi))\right)^2\xi}{\left(\sin(2\,J(\xi))\right)^2}\right)\left(\frac{d}{d\xi}J(\xi)\right)\frac{d}{d\xi}F(\xi)\\ &\quad + \left(4\,\xi - 4\,F(\xi) + 2\,\frac{(2\,\xi - 2\,F(\xi))\left(\cos(2\,J(\xi))\right)^2}{\left(\sin(2\,J(\xi))\right)^2}\right)\frac{d}{d\xi}J(\xi) - 2\,\frac{\cos(2\,J(\xi))}{\sin(2\,J(\xi))} - \xi = 0.\end{aligned}$$

Finalement, si $F(\xi)$ est obtenue, alors nous avons $G(\xi)$ par quadrature

$$G(\xi) = \int \left(\xi + \left(\frac{d}{d\xi}F(\xi)\right)\xi - F(\xi)\right) d\xi + c_3.$$

On obtient les solutions en substituant F, G, H, J dans les équations respectives définissant les invariants.

c) $\{D_1 + \varepsilon P_4 + a P_5 + s P_3\}$: Les invariants sont :

$$F = u - \epsilon\, \ln(x)\,, \qquad G = v - a\ln(x)\,, \qquad H = \sigma - s\ln(x)\,, \qquad J = \theta.$$

La solution pour $J(\xi)$ est donnée implicitement par (7) tandis la fonction $H(\xi)$ est définie par (8). Les fonctions $F(\xi)$ et $G(\xi)$ sont obtenues par les quadratures respectives

$$F(\xi) = \int \left(\frac{2\, \cos(2\,J(\xi))\,\epsilon + \epsilon\, \sin(2\,J(\xi))\,\xi + \sin(2\,J(\xi))\,a}{\sin(2\,J(\xi))\,\xi^2 + 2\,\cos(2\,J(\xi))\,\xi - \sin(2\,J(\xi))} \right) d\xi + c_3$$

et

$$G(\xi) = \int \left(\left(\frac{d}{d\xi} F(\xi) \right) \xi - \varepsilon d\xi \right) + c_4.$$

On obtient les solutions en substituant F, G, H, J dans les équations respectives définissant les invariants.

d) $\{D_1 + \varepsilon P_5 + s P_3\}$: Les invariants sont :

$$F = u, \qquad G = v - \varepsilon\, \ln(x)\,, \qquad H = \sigma - s\ln(x)\,, \qquad J = \theta.$$

La solution pour $J(\xi)$ est donnée implicitement par

$$\frac{2s\tan^{-1}\left(\frac{2s\xi + k\sin(4J(\xi))\xi + k\cos(4J(\xi))}{\sqrt{4s^2-k^2}}\right)}{\sqrt{4s^2-k^2}} + 2\left(J(\xi) - \frac{s\tan^{-1}\left(\frac{k+2s\tan(2J(\xi))}{\sqrt{4s^2-k^2}}\right)}{\sqrt{4s^2-k^2}} \right) = c_1,$$

puis, si l'on trouve $J(\xi)$ explicitement, on obtient par quadrature

$$H(\xi) = \int \left(\frac{(\sin(2\,J(\xi))\,\xi + \cos(2\,J(\xi)))\,s}{2\,\cos(2\,J(\xi))\,\xi - \sin(2\,J(\xi)) + \sin(2\,J(\xi))\,\xi^2} \right) d\xi + c_2.$$

On obtient les fonctions $F(\xi)$ et $G(\xi)$ par les quadratures respectives

$$F(\xi) = \int \left(\frac{\sin(2\,J(\xi))\,\epsilon}{-\sin(2\,J(\xi)) + 2\,\cos(2\,J(\xi))\,\xi + \sin(2\,J(\xi))\,\xi^2} \right) d\xi + c_3$$

et

$$G(\xi) = \int \left(\left(\frac{d}{d\xi} F(\xi) \right) \xi \right) d\xi + c_4.$$

Pour obtenir les solutions, on substitue F, G, H, J dans les équations respectives définissant les invariants.

5 Conclusion

Dans ce travail, on présente l'algèbre de symétrie du modèle de l'écoulement planaire d'un matériau plastique idéal (1) ainsi que la classification de ses sous-algèbres en classes de conjugaison. Les sous-algèbres de dimension un ont servi à la construction des nouvelles classes de solutions invariantes qui ont été étudiées. Les classes de sous-algèbres de dimension deux seront utilisées pour obtenir des solutions partiellement invariantes de défaut $\delta = 1$ qui paraîtront dans un travail subséquent. Une autre perspective intéressante est l'étude des symétries du système de la plasticité idéale en trois dimensions, duquel est dérivé le modèle qui a été étudié dans ce travail.

Finalement, il faut souligner que dans le domaine de la plasticité, la découverte de solutions a conduit, à plusieurs reprises, à de nouvelles techniques qui ont par la suite trouvé application dans l'industrie. Ceci donne une motivation supplémentaire à la recherche de telles solutions exactes. On pourrait aussi s'intéresser à la stabilité des solutions obtenues, car celles qui ont cette propriété pourraient être observables physiquement. Une telle analyse peut alors être un bon point de départ pour un calcul des perturbations.

Références

[1] L. Katchanov. *Éléments de la théorie de la plasticité.* Éditions Mir, Moscou, 1975.

[2] P.J. Olver. *Applications of Lie Groups to Differential Equations.* Springer-Verlag, New-York, 1986.

[3] P. Winternitz. Lie groups and solutions of nonlinear partial differential equations. Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, CP 6128-A, H3C 3J7, Québec (Canada), 1993. CRM-1841.

Appendice

On trouve dans cet appendice la liste de toutes les sous-algèbres de dimension un et deux de l'algèbre de symétrie de (1).

TAB. 2: Liste des sous-algèbres de dimension 1 de $\mathcal{L}$. $(a, \gamma, s \in \mathbb{R},\ s \neq 0)$

$\mathcal{L}_{1,1} = \{P_1 + aP_2\}$	$\mathcal{L}_{1,12} = \{P_2 + P_5\}$	$\mathcal{L}_{1,23} = \{L + \varepsilon P_1 + aP_2 + P_3\}$
$\mathcal{L}_{1,2} = \{P_1 + aP_2 + P_3\}$	$\mathcal{L}_{1,13} = \{P_2 + \varepsilon P_3 + P_5\}$	$\mathcal{L}_{1,24} = \{D_1 + D_2 + L\}$
$\mathcal{L}_{1,3} = \{P_2\}$	$\mathcal{L}_{1,14} = \{D_1 + \gamma D_2\}$	$\mathcal{L}_{1,25} = \{D_1 + D_2 + L + sP_3\}$
$\mathcal{L}_{1,4} = \{P_2 + P_3\}$	$\mathcal{L}_{1,15} = \{D_1 + \gamma D_2 + sP_3\}$	$\mathcal{L}_{1,26} = \{D_1 + \varepsilon P_4 + aP_5\}$
$\mathcal{L}_{1,5} = \{P_3\}$	$\mathcal{L}_{1,16} = \{D_2\}$	$\mathcal{L}_{1,27} = \{D_1 + \varepsilon P_4 + aP_5 + sP_3\}$
$\mathcal{L}_{1,6} = \{P_4 + aP_5\}$	$\mathcal{L}_{1,17} = \{D_2 + sP_3\}$	$\mathcal{L}_{1,28} = \{D_1 + \varepsilon P_5\}$
$\mathcal{L}_{1,7} = \{P_4 + aP_5 + \varepsilon P_3\}$	$\mathcal{L}_{1,18} = \{L\}$	$\mathcal{L}_{1,29} = \{D_1 + \varepsilon P_5 + sP_3\}$
$\mathcal{L}_{1,8} = \{P_5\}$	$\mathcal{L}_{1,19} = \{L + P_3\}$	$\mathcal{L}_{1,30} = \{D_2 + P_1 + aP_2\}$
$\mathcal{L}_{1,9} = \{P_5 + \varepsilon P_3\}$	$\mathcal{L}_{1,20} = \{L + \varepsilon P_2\}$	$\mathcal{L}_{1,31} = \{D_2 + P_1 + aP_2 + sP_3\}$
$\mathcal{L}_{1,10} = \{P_1 + aP_2 + P_4\}$	$\mathcal{L}_{1,21} = \{L + \varepsilon P_2 + P_3\}$	$\mathcal{L}_{1,32} = \{D_2 + P_2\}$
$\mathcal{L}_{1,11} = \{P_1 + aP_2 + P_4 + \varepsilon P_3\}$	$\mathcal{L}_{1,22} = \{L + \varepsilon P_1 + aP_2\}$	$\mathcal{L}_{1,33} = \{D_2 + P_2 + sP_3\}$

TAB. 3: Liste des sous-algèbres de dimension 2 de $\mathcal{L}$. $(a, \gamma, s, s_1, s_2 \in \mathbb{R},\ s, s_1, s_2 \neq 0)$

$\mathcal{L}_{2,1} = \{P_1, P_2\}$
$\mathcal{L}_{2,2} = \{P_1, P_2 + P_3\}$
$\mathcal{L}_{2,3} = \{P_1 + aP_2, P_4\}$
$\mathcal{L}_{2,4} = \{P_1 + aP_2, P_3\}$
$\mathcal{L}_{2,5} = \{P_1 + aP_2, P_3 + P_4\}$
$\mathcal{L}_{2,6} = \{P_1, P_5\}$
$\mathcal{L}_{2,7} = \{P_1, P_3 + P_5\}$
$\mathcal{L}_{2,8} = \{P_1, P_2 + P_4\}$
$\mathcal{L}_{2,9} = \{P_1, P_2 + \varepsilon P_3 + P_4\}$
$\mathcal{L}_{2,10} = \{P_1 + aP_2 + P_4, P_3\}$
$\mathcal{L}_{2,11} = \{P_2, P_3\}$
$\mathcal{L}_{2,12} = \{P_2, P_4\}$
$\mathcal{L}_{2,13} = \{P_2, P_3 + P_4\}$
$\mathcal{L}_{2,14} = \{P_2, P_5\}$
$\mathcal{L}_{2,15} = \{P_2, P_3 + P_5\}$
$\mathcal{L}_{2,16} = \{P_2 + P_5, P_3\}$
$\mathcal{L}_{2,17} = \{P_4, P_5\}$
$\mathcal{L}_{2,18} = \{P_3 + P_4, P_5\}$
$\mathcal{L}_{2,19} = \{P_3, P_4 + aP_5\}$
$\mathcal{L}_{2,20} = \{P_3, P_5\}$
$\mathcal{L}_{2,21} = \{D_1 + \gamma D_2, P_1 + aP_2\}$
$\mathcal{L}_{2,22} = \{D_1 + \gamma D_2 + P_3, P_1 + aP_2\}$
$\mathcal{L}_{2,23} = \{D_1 + \gamma D_2, P_2\}$
$\mathcal{L}_{2,24} = \{D_1 + \gamma D_2 + P_3, P_2\}$
$\mathcal{L}_{2,25} = \{D_1 + \gamma D_2, P_3\}$
$\mathcal{L}_{2,26} = \{D_1 + \gamma D_2, P_4 + aP_5\}$
$\mathcal{L}_{2,27} = \{D_1 + \gamma D_2 + sP_3, P_4 + aP_5\}$
$\mathcal{L}_{2,28} = \{D_1 + \gamma D_2, P_5\}$
$\mathcal{L}_{2,29} = \{D_1 + \gamma D_2 + sP_3, P_5\}$
$\mathcal{L}_{2,30} = \{D_1 + \varepsilon P_4 + \gamma P_5, P_1 + aP_2\}$
$\mathcal{L}_{2,31} = \{D_1 + P_3 + \varepsilon P_4 + \gamma P_5, P_1 + aP_2\}$
$\mathcal{L}_{2,32} = \{D_1 + \varepsilon P_5, P_1 + aP_2\}$
$\mathcal{L}_{2,33} = \{D_1 + \varepsilon P_5 + P_3, P_1 + aP_2\}$
$\mathcal{L}_{2,34} = \{D_1 + \varepsilon P_4 + \gamma P_5, P_2\}$
$\mathcal{L}_{2,35} = \{D_1 + P_3 + \varepsilon P_4 + \gamma P_5, P_2\}$
$\mathcal{L}_{2,36} = \{D_1 + \varepsilon P_5, P_2\}$
$\mathcal{L}_{2,37} = \{D_1 + P_3 + \varepsilon P_5, P_2\}$
$\mathcal{L}_{2,38} = \{D_1 + \varepsilon P_4 + \gamma P_5, P_3\}$
$\mathcal{L}_{2,39} = \{D_1 + \varepsilon P_5, P_3\}$
$\mathcal{L}_{2,40} = \{D_1 + \varepsilon P_4 + \gamma P_5, P_4 + aP_5\},\ |\gamma| \neq |a|$
$\mathcal{L}_{2,41} = \{D_1 + s_1 P_3 + \varepsilon P_4 + \gamma P_5, s_2 P_3 + P_4 + aP_5\},$
$|\gamma| \neq |a|$
$\mathcal{L}_{2,42} = \{D_1 + \varepsilon P_5, P_4\}$
$\mathcal{L}_{2,43} = \{D_1 + s_1 P_3 + \varepsilon P_5, s_2 P_3 + P_4\}$
$\mathcal{L}_{2,44} = \{D_1 + \varepsilon P_4, P_5\}$
$\mathcal{L}_{2,45} = \{D_1 + s_1 P_3 + \varepsilon P_4, s_2 P_3 + P_5\}$
$\mathcal{L}_{2,46} = \{D_2, P_1 + aP_2\}$
$\mathcal{L}_{2,47} = \{D_2 + P_3, P_1 + aP_2\}$
$\mathcal{L}_{2,48} = \{D_2, P_2\}$
$\mathcal{L}_{2,49} = \{D_2 + P_3, P_2\}$
$\mathcal{L}_{2,50} = \{D_2, P_3\}$
$\mathcal{L}_{2,51} = \{D_2, P_4 + aP_5\}$
$\mathcal{L}_{2,52} = \{D_2 + sP_3, P_4 + aP_5\}$
$\mathcal{L}_{2,53} = \{D_2, P_5\}$
$\mathcal{L}_{2,54} = \{D_2 + sP_3, P_5\}$
$\mathcal{L}_{2,55} = \{D_2 + \varepsilon P_1 + \gamma P_2, P_1 + aP_2\},\ |\gamma| \neq |a|$
$\mathcal{L}_{2,56} = \{D_2 + \varepsilon P_1 + \gamma P_2 + s_1 P_3, P_1 + aP_2 + s_2 P_3\},$
$|\gamma| \neq |a|$
$\mathcal{L}_{2,57} = \{D_2 + \varepsilon P_2, P_1\},\ |\gamma| \neq |a|$
$\mathcal{L}_{2,58} = \{D_2 + \varepsilon P_2 + s_1 P_3, P_1 + s_2 P_3\},\ |\gamma| \neq |a|$
$\mathcal{L}_{2,59} = \{D_2 + \varepsilon P_1, P_2\}$
$\mathcal{L}_{2,60} = \{D_2 + \varepsilon P_1 + s_1 P_3, P_2 + s_2 P_3\}$
$\mathcal{L}_{2,61} = \{D_2 + P_1 + \gamma P_2, P_3\}$
$\mathcal{L}_{2,62} = \{D_2 + P_2, P_3\}$
$\mathcal{L}_{2,63} = \{D_2 + P_1 + \gamma P_2, P_4 + aP_5\}$
$\mathcal{L}_{2,64} = \{D_2 + P_1 + \gamma P_2 + sP_3, P_4 + aP_5\}$
$\mathcal{L}_{2,65} = \{D_2 + P_2, P_4 + aP_5\}$
$\mathcal{L}_{2,66} = \{D_2 + P_2 + sP_3, P_4 + aP_5\}$
$\mathcal{L}_{2,67} = \{D_2 + P_1 + \gamma P_2, P_5\}$
$\mathcal{L}_{2,68} = \{D_2 + P_1 + \gamma P_2 + sP_3, P_5\}$
$\mathcal{L}_{2,69} = \{D_2 + P_2, P_5\}$
$\mathcal{L}_{2,70} = \{D_2 + P_2, \varepsilon P_3 + P_5\}$
$\mathcal{L}_{2,71} = \{D_1 + D_2, P_1 + aP_2 + P_4\}$
$\mathcal{L}_{2,72} = \{D_1 + D_2 + sP_3, P_1 + aP_2 + P_4\}$
$\mathcal{L}_{2,73} = \{D_1 + D_2, P_2 + P_5\}$
$\mathcal{L}_{2,74} = \{D_1 + D_2 + sP_3, P_2 + P_5\}$
$\mathcal{L}_{2,75} = \{L, P_3\}$
$\mathcal{L}_{2,76} = \{L, P_4 + aP_5\}$
$\mathcal{L}_{2,77} = \{L, P_3 + P_4 + aP_5\}$
$\mathcal{L}_{2,78} = \{L, P_5\}$
$\mathcal{L}_{2,79} = \{L, P_3 + P_5\}$
$\mathcal{L}_{2,80} = \{L + \varepsilon P_1 + \gamma P_2, P_3\}$
$\mathcal{L}_{2,81} = \{L + \varepsilon P_2, P_3\}$
$\mathcal{L}_{2,82} = \{L + \varepsilon P_1 + \gamma P_2, P_4 + aP_5\}$
$\mathcal{L}_{2,83} = \{L + \varepsilon P_1 + \gamma P_2, P_3 + P_4 + aP_5\}$
$\mathcal{L}_{2,84} = \{L + \varepsilon P_2, P_4 + aP_5\}$
$\mathcal{L}_{2,85} = \{L + \varepsilon P_2, P_3 + P_4 + aP_5\}$
$\mathcal{L}_{2,86} = \{L + \varepsilon P_1 + \gamma P_2, P_5\}$
$\mathcal{L}_{2,87} = \{L + \varepsilon P_1 + \gamma P_2, P_3 + P_5\}$
$\mathcal{L}_{2,88} = \{L + \varepsilon P_2, P_5\}$
$\mathcal{L}_{2,89} = \{L + \varepsilon P_2, P_3 + P_5\}$
$\mathcal{L}_{2,90} = \{D_1 + D_2 + L, P_4 + aP_5\}$
$\mathcal{L}_{2,91} = \{D_1 + D_2 + L + sP_3, P_4 + aP_5\}$
$\mathcal{L}_{2,92} = \{D_1 + D_2 + L, P_5\}$
$\mathcal{L}_{2,93} = \{D_1 + D_2 + L + sP_3, P_5\}$
$\mathcal{L}_{2,94} = \{D_1, D_2\}$
$\mathcal{L}_{2,95} = \{D_1 + s_1 P_3, D_2 + s_2 P_3\}$
$\mathcal{L}_{2,96} = \{D_1 + \gamma D_2, L\}$
$\mathcal{L}_{2,97} = \{D_1 + \gamma D_2, L + P_3\}$
$\mathcal{L}_{2,98} = \{D_2, L\}$
$\mathcal{L}_{2,99} = \{D_2, L + P_3\}$
$\mathcal{L}_{2,100} = \{D_1 + 2D_2, L + \varepsilon P_1 + aP_2\}$
$\mathcal{L}_{2,101} = \{D_1 + 2D_2 + sP_3, L + \varepsilon P_1 + aP_2\}$
$\mathcal{L}_{2,102} = \{D_1 + 2D_2, L + \varepsilon P_2\}$
$\mathcal{L}_{2,103} = \{D_1 + 2D_2 + sP_3, L + \varepsilon P_2\}$
$\mathcal{L}_{2,104} = \{D_1 + \varepsilon P_4 + \gamma P_5, L\}$
$\mathcal{L}_{2,105} = \{D_1 + \varepsilon P_4 + \gamma P_5, L + P_3\}$
$\mathcal{L}_{2,106} = \{D_1 + \varepsilon P_5, L\}$
$\mathcal{L}_{2,107} = \{D_1 + \varepsilon P_5, L + P_3\}$