
Un porc in dans un environnement sain ou comment la programmation mathématique permettrait aux porcs de ne pas trop faire sentir leur présence

FRANÇOIS DUBEAU,
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES,
FACULTÉ DES SCIENCES,
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
CANDIDO POMAR
AGRICULTURE ET AGROALIMENTAIRE CANADA,
LENNOXVILLE

Résumé

Le problème de pollution des cours d'eau par l'industrie porcine est un problème fortement médiatisé. Dans cet exposé il sera question de formulation de diètes animales qui tiennent compte de considérations environnementales : la pollution par l'azote et le phosphore. Dans un premier temps nous rappelons le modèle classique de formulation d'une diète. Ensuite nous montrons comment il est possible de quantifier les rejets d'azote et de phosphore associés à une diète. Nous sommes alors amenés à considérer des problèmes de programmation linéaire à deux ou à trois critères. Quelques éléments de la programmation linéaire multicritère seront présentés. Finalement nous ferons une analyse de notre problème réel et en tirerons quelques conclusions.

1 Introduction

Le but de cet article est d'illustrer l'utilisation de la programmation linéaire multicritère comme outil d'aide à la décision dans un secteur de production agricole où plusieurs enjeux conflictuels sont présents. En effet l'analyse multicritère donne un éventail de possibilités (l'ensemble de Pareto) qui permet aux décideurs, producteurs et gouvernements, de mesurer l'impact financier de mesures dédiées à la protection de l'environnement.

La concentration d'élevages de porcs dans certaines régions géographiques a plusieurs conséquences environnementales. Aux États-Unis [11], au Canada [1] et dans d'autres pays [6, 16, 22], un des problèmes associés aux surplus d'effluents provenant de l'élevage porc in est leur teneur élevée en minéraux, parmi lesquels l'azote et le phosphore sont les plus préoccupants. L'azote et le phosphore excrétés proviennent directement des fractions non digestibles et des apports excédentaires de nutriments de la diète [10, 11, 13, 17]. La diminution des rejets doit commencer par une diminution des fractions excédentaires de nutriments et une amélioration de l'utilisation métabolique des autres

fractions. L'utilisation métabolique de l'azote peut être améliorée par l'augmentation de la qualité des protéines de la diète tandis que le rejet de phosphore peut être réduit par l'amélioration de la digestibilité du phosphore. Dans les deux cas, il y aura des conséquences inévitables sur le coût de la diète.

2 Modèle classique de formulation d'une diète animale

Le problème de diète à coût minimum a été introduit par Stigler [20], repris par Dantzig [2, 3] et par Garille et Gass [7]. Une diète animale est un mélange d'ingrédients nutritifs disponibles qui doit satisfaire à des besoins nutritionnels de subsistance et/ou de croissance. Le but du modèle classique de formulation d'une diète est de déterminer une diète admissible à moindre coût. Plusieurs méthodes servent à la formulation de diètes, parmi lesquelles la programmation linéaire est indubitablement la plus répandue [15, 23]. L'évolution de différents modèles (linéaires, non linéaires et stochastiques) de formulation de diète est décrite par Lancaster [12]. Notons que le modèle linéaire est encore aujourd'hui le plus utilisé par l'industrie de l'alimentation animale [15]. Nous supposons ici qu'on peut utiliser le modèle linéaire tout en gardant à l'esprit ses limites.

Associons une variable de décision à chacun des n ingrédients disponibles de sorte que $x = (x_j)_{j=1}^n$ soit le vecteur de décision de notre modèle. La variable x_j représente la quantité (en kg) du $j^{\text{ième}}$ ingrédient dans une unité de poids (1kg) de la diète. La fonction objectif du modèle est le coût de la diète. On associe un coût à chacun des ingrédients de sorte que $c = (c_j)_{j=1}^n$ soit le vecteur des coûts, où c_j représente le coût unitaire du $j^{\text{ième}}$ ingrédient (\$/kg). Ainsi le coût d'une diète $x = (x_j)_{j=1}^n$ est $z = cx = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ qu'il faut minimiser sur l'ensemble \mathcal{S} des diètes admissibles, c'est-à-dire l'ensemble des diètes qui satisfont à toutes les contraintes du problème. Le modèle classique de formulation d'une diète animale à moindre coût est alors

$$(P) \quad \begin{cases} \min z = cx \\ \text{s.à} \\ x \in \mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b \text{ et } x \geq 0\}. \end{cases}$$

Les contraintes imposent des limites aux quantités d'ingrédients et de nutriments de la diète. En particulier on produit une unité de poids (1kg) de la diète, donc $\sum_{j=1}^n x_j = 1$. Certains ingrédients, ou combinaisons d'ingrédients, peuvent être imposés dans la diète, ce qui donne des contraintes de type =, de type \geq ou de type \leq . Pour satisfaire les besoins en protéines, on introduit les contraintes suivantes sur le groupe des L acides aminés contenus dans les ingrédients. On pose

$$\sum_{j=1}^n aa_{lj}^{dig} x_j \geq b_l^* \quad (l = 1, \dots, L), \quad (2.1)$$

où aa_{lj}^{dig} représente la quantité d'acide aminé l digestible contenue dans une unité d'ingrédient j et b_l^* est la quantité minimale requise d'acide aminé l digestible. Finalement, la diète doit satisfaire des

besoins de phosphore digestible noté b_{ph}^* , d'où

$$\sum_{j=1}^n ph_j^{dig} x_j \geq b_{ph}^*, \quad (2.2)$$

où ph_j^{dig} est la quantité de phosphore digestible contenue dans une unité d'ingrédient j .

3 Modélisation des rejets d'azote et de phosphore

Les rejets d'azote et de phosphore sont directement reliés aux surplus de protéines (acides aminés) et de phosphore de la diète et aux fractions non disponibles pour le métabolisme animal. Pour modéliser les rejets nous établissons les contenus en protéines et en phosphore d'une diète et tenons compte de la partie de ces contenus qui sont effectivement assimilés.

3.1 Rejet d'azote

Le contenu en protéines d'une diète $x = (x_j)_{j=1}^n$ est $p_r x = \sum_{j=1}^n pr_j x_j$, où pr_j est la quantité de protéines par unité d'ingrédient j . Il se décompose en deux parties : une partie digestible et une partie non digestible. La partie non digestible est complètement rejetée par l'animal et forme une partie du rejet total. L'autre partie du rejet total correspond à la quantité de protéines digestibles donnée en excès. Cette quantité digestible en excès est constituée des surplus des L acides aminés de la diète. Pour chacun des L acides aminés ce surplus est donné par la contrainte (2.1) du modèle et vaut $\sum_{j=1}^n aa_{lj}^{dig} x_j - b_l^*$ puisque b_l^* représente la quantité d'acide aminé de type l qui doit être assimilé pour assurer la croissance du porc. Le rejet de protéines $r_{pr}(x)$ est alors donné par le contenu en protéines de la diète duquel on retranche la quantité de protéines effectivement digérée donnée par $\sum_{l=1}^L b_l^* = b_{pr}^*$, ce qui donne

$$r_{pr} = p_r x - b_{pr}^*. \quad (3.1)$$

Ainsi, diminuer le rejet total $r_{pr}(x)$ revient à diminuer le contenu en protéines $p_r x$ de la diète en maintenant fixes les besoins b_{pr}^* en protéines. Finalement, comme les protéines sont composées à 16 % d'azote [8], le vrai rejet azoté est $0,16 r_{pr}(x)$.

3.2 Rejet de phosphore

De la même façon, le contenu en phosphore d'une diète $x = (x_j)_{j=1}^n$ est $p_h x = \sum_{j=1}^n ph_j x_j$, où ph_j est la quantité de phosphore par unité d'ingrédient j . Il se décompose en deux parties : une partie digestible et une partie non digestible. Le contenu en phosphore non digestible sera complètement rejeté ainsi que le contenu en phosphore digestible donné en excès. En tenant compte de la contrainte (2.2), cet excès de phosphore digestible est donné par $\sum_{j=1}^n ph_j^{dig} x_j - b_{ph}^*$. La quantité b_{ph}^* est la quantité de phosphore qui est effectivement digérée. De cette façon le rejet de phosphore $r_{ph}(x)$ est donné par le contenu en phosphore de la diète duquel on retranche la quantité de phosphore

effectivement digérée

$$r_{ph}(x) = p_h x - b_{ph}^*. \quad (3.2)$$

Ainsi, diminuer le rejet de phosphore revient à diminuer le contenu en phosphore de la diète.

La digestibilité du phosphore peut être améliorée en ajoutant à la diète une enzyme appelée phytase. Cette enzyme améliore les propriétés de digestibilité du phosphore, c'est-à-dire augmente la partie digestible et diminue la partie non digestible, ce qui a pour effet de réduire le contenu en phosphore d'une diète et, par conséquent, de réduire le rejet [14].

4 Modèle linéaire multicritère

Nous considérons le problème sous forme de minimisation [18] :

$$(PLMC) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min z_1 = c_1 x \\ \vdots \\ \min z_k = c_k x \\ \text{s.à} \\ x \in \mathcal{S}. \end{array} \right.$$

Soit \mathcal{S}_c la région réalisable dans l'espace des critères \mathbb{R}^k définie par

$$\mathcal{S}_c = \{z \in \mathbb{R}^k \mid z = Cx \text{ pour } x \in \mathcal{S}\} = C\mathcal{S},$$

où

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n c_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n c_{kj} x_j \end{pmatrix} = Cx.$$

Une solution réalisable $\bar{x} \in \mathcal{S}$ est une solution efficace si et seulement si il n'existe aucune autre solution réalisable $x \in \mathcal{S}$ telle que (a) $z_i(x) \leq z_i(\bar{x})$ pour $i = 1, \dots, k$, et (b) $z_j(x) < z_j(\bar{x})$ pour au moins un $j \in \{1, \dots, k\}$. L'ensemble de toutes les solutions réalisables efficaces est l'ensemble de Pareto noté \mathcal{E} . La représentation de l'ensemble de Pareto dans l'espace des critères est l'ensemble $\mathcal{E}_c = C\mathcal{E}$. C'est cette surface \mathcal{E}_c que nous tenterons de décrire ou de visualiser pour nos modèles à deux ou trois critères. La visualisation de l'ensemble de Pareto lorsqu'il y a plus de deux critères n'est pas un problème facile. Pour trois critères on peut visualiser en trois dimensions en joignant les sommets efficaces obtenus avec un logiciel comme ADBASE [19] (mais le problème de l'adjacence des sommets n'est pas évident) ou bien construire cet ensemble de Pareto en discrétisant la surface efficace. Nous avons opté pour la construction des ensembles de Pareto en utilisant une analyse paramétrique à l'aide du solveur d'Excel[©] [5].

Pour compléter cette section, notons que d'autres modèles utilisant la programmation multicritère fractionnaire ont également été présentés dans la littérature [21, 9].

5 Contextes et données

Les ingrédients ainsi que les variables du modèle associées aux différents ingrédients sont énumérés au Tableau 1. On retrouve à la Figure 1 le modèle au complet avec les valeurs des coefficients techniques. Pour le calcul des valeurs des coefficients techniques du modèle (P), voir [8, 14, 4]. La période d'élevage des porcs se fait en deux phases : une Phase 1 dite de croissance (de 20 à 65 kg de poids vif) et une Phase 2 dite de finition (de 65 à 105 kg de poids vif). Les besoins des porcs, les termes de droite des contraintes du modèle (P) de la Section 2, sont légèrement différents d'une phase à l'autre. L'accroissement du phosphore disponible résultant de l'ajout de 250, 500 et 750 unités phytasiques (UP) de phytase microbienne a été estimé pour chaque matière première. Finalement, les prix des ingrédients utilisés dans cette étude sont ceux enregistrés au début de chaque mois par des collaborateurs de l'industrie québécoise (Coopérative fédérée de Québec, Montréal). Nous avons retenu les mois d'août 2002, de décembre 2002 et d'avril 2003, trois mois qui représentent bien les prix et la disponibilité des ingrédients.

Type	Ingrédient	Variable
Céréales	avoine	x_1
	blé dur	x_2
	maïs	x_3
	orge	x_4
Tourteaux d'oléagineux	tourteau de soya	x_5
	tourteau de colza	x_6
Sous-produits végétaux	remoulage de blé dur	x_7
	gluten feed de blé	x_8
Sous-produits animaux	farine de viande 50%	x_9
	farine de plumes	x_{10}
	gras animal	x_{11}
Minéraux	phosphate bicalcique	x_{12}
	carbonate de calcium	x_{13}
	chlorure de sodium	x_{14}
Acides aminés de synthèse	L-lysine	x_{15}
	DL-méthione	x_{16}
	L-thréonine	x_{17}
	L-tryptophane	x_{18}
Prémix	quantité imposée 5g/kg	x_{19}

TAB. 1 – Liste des ingrédients disponibles

6 Modèles et analyse des résultats

Dans la suite de ce travail nous analyserons les modèles de diète à deux critères qui tiennent compte des rejets d'azote et de phosphore, en ajoutant séparément au critère économique ($z_1 = cx$) l'un ou l'autre des deux critères qui décrivent les contenus en azote ($z_2 = p_r x$) et en phosphore ($z_3 = p_h x$).

QUÉBEC

CONTRAINTES	INGRÉDIENTS																			TYPE	TERMES DE DROITE b		
	MATRICE A																				PHASE 1	PHASE 2	
	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	X13	X14	X15	X16	X17	X18	X19				
Poids total	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	=	1	1
Énergie	1900	2450	2650	2280	1940	1510	1850	1950	2175	2250	7110	0	0	0	3380	4130	2930	4770	0	?	2414 kcal/kg	2414 kcal/kg	
Sodium	0,1	0,1	0,04	0,1	0,3	0,4	0,2	1,7	8	3,4	0	1,8	0,8	395	0	0	0	0	0	?	1,3 g/kg	1 g/kg	
Calcium	1,1	0,8	0,4	0,7	3,4	8,3	1,2	1,2	76	3,3	0	220	385	3	0	0	0	0	0	=	6,7 g/kg	5,4 g/kg	
Ingrédients imposés	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	=	5 g/kg	5 g/kg	
Ingrédients restreints	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	?	200 g/kg	200 g/kg	
	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	?	400 g/kg	400 g/kg	
	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	?	600 g/kg	600 g/kg	
	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	?	600 g/kg	600 g/kg	
	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	?	50 g/kg	50 g/kg	
	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	?	55 g/kg	55 g/kg	
	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	?	50 g/kg	50 g/kg	
	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	?	30 g/kg	30 g/kg	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	?	50 g/kg	50 g/kg	
ACIDES AMINÉS DIGESTIBLES																					b [†]		
Lysine	3	2,5	1,9	2,8	24,9	13,6	4,6	2,9	25,5	13,9	0	0	0	0	798	0	0	0	0	?	9,7 g/kg	6,6 g/kg	
Thréonine	2,4	2,7	2,5	2,6	15,3	10,8	3,6	3,4	16,2	31,3	0	0	0	0	0	0	990	0	0	?	6,1 g/kg	4,3 g/kg	
Méthionine	1,5	1,5	1,5	1,4	5,9	6	1,9	1,6	7	4,5	0	0	0	0	0	0	990	0	0	?	2,6 g/kg	1,8 g/kg	
Méthionine+Cystine	3,9	3,7	3,3	3,4	11,6	12,6	4,4	3,9	10,4	34,7	0	0	0	0	0	0	990	0	0	?	5,5 g/kg	3,9 g/kg	
Tryptophane	1	1,1	0,4	1	5,2	3,3	1,6	1,2	2,8	4,6	0	0	0	0	0	0	0	985	0	?	1,8 g/kg	1,2 g/kg	
Isoleucine	2,9	3,4	2,7	2,9	18,7	10,6	4	3,5	13,4	32,4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	?	5,3 g/kg	3,7 g/kg	
Valine	4	4	3,6	4,1	19,3	13,1	5,4	4,9	21,3	49,4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	?	6,6 g/kg	4,5 g/kg	
Leucine	5,8	6,4	9,5	5,7	29,8	18,6	7,7	6,9	31,9	57	0	0	0	0	0	0	0	0	0	?	9,8 g/kg	6,7 g/kg	
Phénylalanine	4,1	4,5	3,7	4,1	20,6	10,9	5,1	4,5	18,4	34,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	?	5,8 g/kg	4,0 g/kg	
Phénylalanine+Tyrosine	6,9	7,1	6,8	6,5	34,5	18,8	8,5	7,6	29,6	53,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	?	9,1 g/kg	6,3 g/kg	
Histidine	1,7	2,2	2,1	1,8	10,9	7,4	3,3	3,1	9,5	6,9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	?	3,1 g/kg	2,1 g/kg	
Arginine	5,8	4,7	3,5	4	31,6	17,6	8,5	7,2	31	47,8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	?	4,0 g/kg	2,4 g/kg	
Pool des aa non essentiels	40,75	57,36	36,30	46,66	206,1	144,9	72,37	61,15	254,4	357,1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	?	63,51 g/kg	43,44 g/kg	
PHOSPHORE DIGESTIBLE																					b ^{†ph}		
Sans phytase	0,7	1,7	0,4	1,0	1,9	2,4	3,3	2,6	31,4	1,6	0	180,4	0,2	0	0	0	0	0	0	?	3,2 g/kg	2,6 g/kg	
Avec phytase (250 UP)	1,1	2,1	0,7	1,5	2,7	3,9	4,4	3,6	36,5	2,2	0,0	180,4	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	?	3,2 g/kg	2,6 g/kg	
Avec phytase (500 UP)	1,3	2,4	0,9	1,7	3,1	4,6	4,9	4,1	38,8	2,5	0,0	180,4	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	?	3,2 g/kg	2,6 g/kg	
Avec phytase (750 UP)	1,5	2,5	1,0	1,8	3,4	5,0	5,2	4,3	40,4	2,7	0,0	180,4	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	?	3,2 g/kg	2,6 g/kg	
Coût de la phytase : 4 \$/1000UP																							
MOIS	VECTEUR DES COÛTS : PRIX DES INGRÉDIENTS (\$/kg)																						
Août 2002	0,255	0,243	0,185	0,245	0,357	0,272	0,141	0,142	0,307	0,379	0,455	0,455	0,033	0,076	2,650	3,900	4,750	50,50	2,663				
Décembre 2002	0,234	0,227	0,18	0,242	0,324	0,236	0,151	0,17	0,274	0,389	0,459	0,455	0,033	0,076	2,750	3,900	4,750	50,50	2,879				
Avril 2003	0,222	0,212	0,171	0,206	0,32	0,242	0,158	0,176	0,318	0,391	0,448	0,42	0,033	0,076	3,150	3,900	4,750	50,50	2,875				
	VECTEUR DES REJETS D'AZOTE : PROTÉINES BRUTES (g/kg)																						
	98	145	81	101	453	337	154	147	540	845	0	0	0	0	798	990	731	853	0				
	VECTEUR DES REJETS DE PHOSPHORE : PHOSPHORE TOTAL (g/kg)																						
	3,2	3,4	2,6	3,4	6,2	11,4	8,1	7,4	38,8	5	0	185	0,2	0	0	0	0	0	0				

FIG. 1 – Coefficients techniques du modèle

Ensuite nous analyserons le modèle formé des trois critères : économique ($z_1 = cx$), contenu en azote ($z_2 = p_r x$) et contenu en phosphore ($z_3 = p_h x$). Les résultats numériques montrent que le comportement du modèle est similaire pour les deux phases et les trois mois considérés. En conséquence nous ne présentons les résultats que pour la Phase 2 du mois d'avril 2003.

6.1 Modèles à deux critères

Nous analysons séparément l'influence de la réduction de chacun des rejets sur le critère économique. On obtient ainsi des modèles bicritères à minimiser sur l'ensemble admissible \mathcal{S} , et les rejets sont calculés selon (3.1) et (3.2).

Lorsque nous considérons les rejets d'azote, le problème est :

$$(\text{PLBC}(c, p_r)) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min z_1 = cx \\ \min z_2 = p_r x \\ \text{s.à} \\ x \in \mathcal{S}, \end{array} \right.$$

et lorsqu'on considère les rejets de phosphore, le problème est :

$$(\text{PLBC}(c, p_h)) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min z_1 = cx \\ \min z_3 = p_h x \\ \text{s.à} \\ x \in \mathcal{S}. \end{array} \right.$$

Le Tableau 2 donne les sommets efficaces dans l'espace des critères, et les courbes de Pareto sont données à la Figure 2. Nous observons qu'il est possible d'obtenir d'importantes diminutions, soit du rejet d'azote soit du rejet de phosphore, pour de faibles augmentations du coût de la diète. La phytase n'a aucun effet sur la courbe de Pareto coût - rejet d'azote. Nous observons également que la phytase a peu d'influence sur la forme de courbe de Pareto coût - rejet de phosphore; par contre les courbes de Pareto sont décalées vers la gauche à mesure qu'on augmente la quantité de phytase utilisée, ce qui est tout à fait normal puisque la phytase a un effet direct sur le contenu en phosphore digestible de la diète et ainsi sur le rejet de phosphore. Par exemple, pour une diète à coût minimum, il y a un rejet de 2,793 g/kg sans usage de phytase et de 1,720 g/kg avec usage de 750 UP. Nous avons également remarqué qu'une diminution du rejet d'azote, (respectivement de phosphore) n'entraîne ni une diminution ni une augmentation du rejet de phosphore, (respectivement d'azote).

Finalement, la forme des courbes de Pareto dépend de la structure de prix et de la disponibilité des ingrédients de la diète. La Figure 3 contient les graphes des deux courbes de Pareto pour les trois mois retenus : août 2002, décembre 2002 et avril 2003.

Phase 2 - Avril 2003					
Azote		Phosphore			
Sans phytase (0 UP)		Sans phytase (0 UP)		Avec phytase (750 UP)	
Valeurs initiales		Valeurs initiales			
10,729 g/kg	0,215 \$/kg	2,793 g/kg	0,215 \$/kg	1,720 g/kg	0,215 \$/kg
Pourcentage diminution rejet	Pourcentage augmentation coût	Pourcentage diminution rejet	Pourcentage augmentation coût	Pourcentage diminution rejet	Pourcentage augmentation coût
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,84	0,02	5,74	0,42	6,98	0,39
7,64	0,30	7,57	0,65	13,72	1,47
15,67	0,71	14,05	1,86	15,77	1,95
20,24	1,13	20,34	3,28	24,69	4,72
22,40	1,57	20,40	3,30	24,88	4,79
47,85	7,12	29,45	8,79	34,02	8,77
52,91	8,32	31,17	9,90	34,23	8,87
56,51	9,24	38,21	18,16	35,81	10,32
62,99	10,99	38,22	18,20	37,96	12,44
63,35	11,10	46,61	171,22	40,47	15,12
64,16	11,58	55,82	339,73	43,51	56,02
66,71	13,34	56,39	350,18	62,35	329,79
		67,78	680,88	62,38	331,28
				68,75	662,93

TAB. 2 – Effet de la diminution des rejets sur l’augmentation du coût

6.2 Modèle à trois critères

Les deux modèles bicritères nous indiquent que les rejets d’azote et les rejets de phosphore ne sont pas liés, ainsi on ne peut utiliser l’un des deux pour agir sur l’autre. En conséquence on analyse maintenant le modèle à trois critères pour obtenir l’effet de la réduction combinée des rejets d’azote et des rejets de phosphore.

$$(\text{PLTC}(c, p_r, p_h)) \left\{ \begin{array}{l} \min z_1 = cx \\ \min z_2 = p_r x \\ \min z_3 = p_h x \\ \text{s.à.} \\ x \in \mathcal{S}. \end{array} \right.$$

Le problème de la détermination et de la visualisation de la surface efficace dans l’espace des critères est plus difficile dans le cas d’un problème à plus de deux critères. Une façon de déterminer la surface efficace est de modifier le problème à trois critères et de le ramener à un problème à un critère économique tout en fixant les niveaux des contenus en azote et en phosphore de la diète. On fixe ainsi également les niveaux de rejets de phosphore et d’azote à des valeurs données. Cette méthode paramétrique donne directement les résultats dans une seule table. Elle correspond à l’approche ϵ -contrainte couramment utilisée en optimisation multicritère [18].

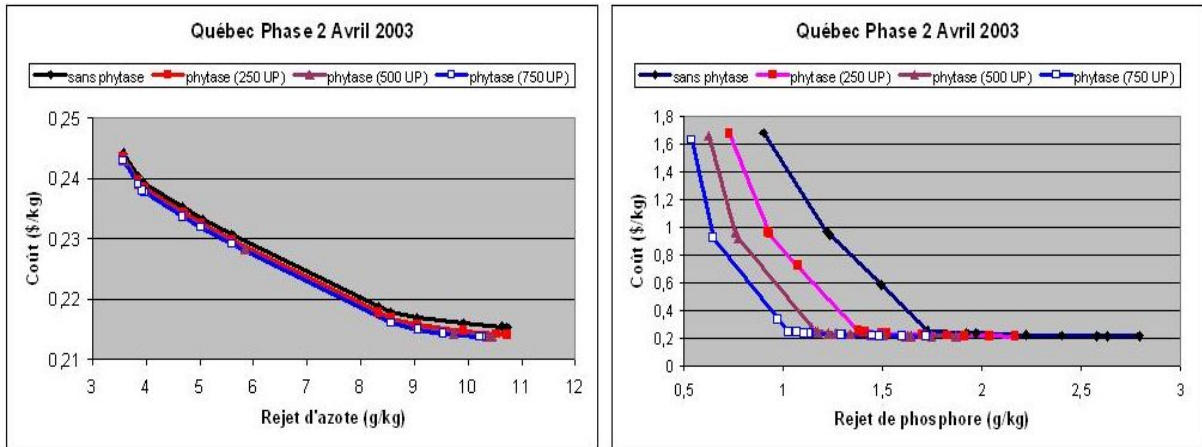


FIG. 2 – Courbes de Pareto : rejet d'azote vs coût de la diète et rejet de phosphore vs coût de la diète

Pour ajuster la plage des valeurs visitées, nous minimisons d'abord le coût pour ensuite noter la valeur de celui-ci ainsi que celles des rejets de phosphore et d'azote. Notons ce coût par z_1^{min} , le contenu en azote à cette étape par z_2^{max} et le contenu en phosphore par z_3^{max} . Ensuite, nous minimisons le contenu en azote et nous notons sa valeur minimale z_2^{min} . Finalement le contenu en phosphore est minimisé et sa valeur minimale z_3^{min} est notée. Ces valeurs nous donnent les intervalles de variation des valeurs des deux formes de contenus (et de rejets par le fait même). Nous avons résolu le problème

$$(P_k) \quad \begin{cases} \min z_k \\ \text{s.à} \\ x \in \mathcal{S} \end{cases}$$

pour $k = 1, 2, 3$ de façon à déterminer les valeurs z_i^{min} ($i = 1, 2, 3$) et z_j^{max} ($j = 2, 3$). On définit alors la variation totale du contenu en azote par

$$\Delta z_2 = z_2^{max} - z_2^{min}$$

et la variation totale du contenu en phosphore par

$$\Delta z_3 = z_3^{max} - z_3^{min}.$$

À partir de ces variations nous pouvons maintenant résoudre une série de problèmes et générer les valeurs du coût en fonction des contenus en azote et phosphore de la diète :

$$(P_{ij}) \quad \begin{cases} \min z_1 = cx \\ \text{s.à} \\ x \in \mathcal{S} \\ p_r x = z_2^{max} - \frac{i}{k} \Delta z_2 \\ p_h x = z_3^{max} - \frac{l}{l} \Delta z_3 \end{cases}$$

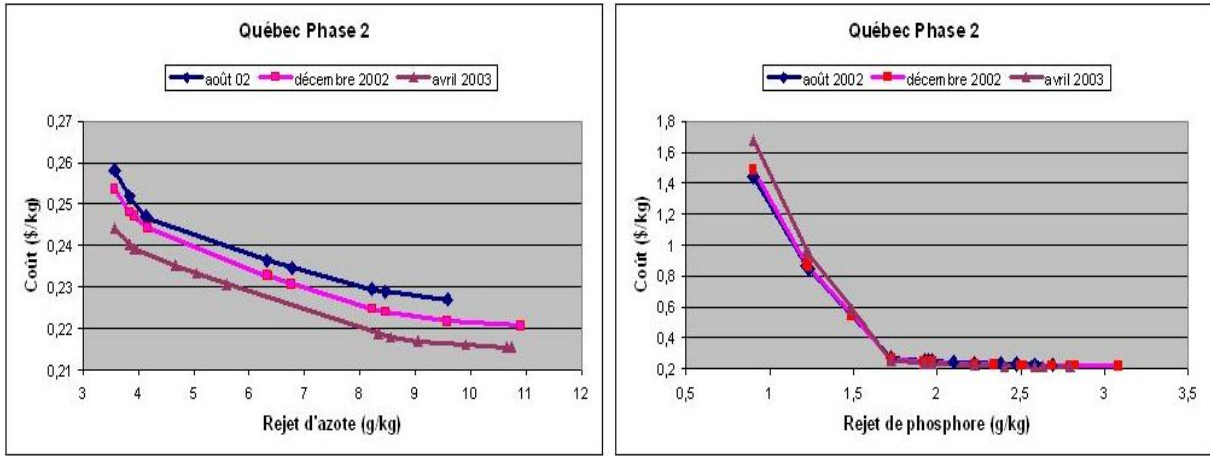


FIG. 3 – Variation des courbes de Pareto avec les prix des ingrédients

pour $i = 0, \dots, k$ et $j = 0, \dots, l$. Ainsi nous minimisons $(k+1)(l+1)$ fois le coût de la diète. Notons qu'il n'existe aucune diète réalisable pour certaines combinaisons de contenus en azote et en phosphore. Les pourcentages de réduction des rejets d'azote et de phosphore sont respectivement donnés par

$$100 * \frac{\Delta z_2}{z_2^{max} - b_{pr}^*} * \frac{i}{k} \quad \text{et} \quad 100 * \frac{\Delta z_3}{z_3^{max} - b_{ph}^*} * \frac{j}{l}.$$

Pourcentage (%) d'augmentation du coût (0% = 0,215 \$/kg)		Québec, Phase 2, Avril 2003, Phytase (0 UP)																				
		Rejets d'azote en g/kg										Pourcentage (%) de diminution des rejets d'azote										
Rejets de phosphore en g/kg	Pourcentage (%) de diminution	6,09	6,34	6,58	6,83	7,07	7,31	7,56	7,80	8,05	8,29	8,53	8,78	9,02	9,27	9,51	9,75	10,00	10,24	10,48	10,73	
1,91	31,5																				25,5	23,0
2,00	28,4								15,7	13,8	12,0	10,1	8,3	8,1	8,1	8,1	8,1	8,1	8,1	8,1	8,2	8,3
2,09	25,2						15,3	13,4	11,6	9,7	8,0	6,2	6,2	6,2	6,2	6,2	6,2	6,2	6,2	6,2	6,8	6,9
2,18	22,1				14,9	13,0	11,2	9,3	7,6	5,9	4,3	4,3	4,4	4,5	4,7	4,8	5,0	5,1	5,2	5,4	5,5	5,5
2,26	18,9		16,7	12,6	10,7	9,0	7,2	5,5	3,8	3,1	3,0	3,0	3,0	3,2	3,3	3,4	3,6	3,7	3,9	4,0	4,1	4,1
2,35	15,8	14,8	12,1	10,6	9,0	7,5	6,1	4,6	3,1	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
2,44	12,6	14,2	11,7	10,2	8,6	7,2	5,8	4,4	2,9	2,1	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7	1,6	1,6	1,6	1,7	1,8	1,8
2,53	9,5	14,0	11,8	10,2	8,7	7,3	5,9	4,4	3,0	2,1	1,7	1,6	1,5	1,3	1,2	1,1	1,0	1,0	1,0	1,1	1,1	1,1
2,62	6,3	14,1	11,9	10,3	8,8	7,4	5,9	4,5	3,1	2,2	1,6	1,4	1,4	1,2	1,1	0,9	0,8	0,6	0,5	0,5	0,6	0,6
2,70	3,2	14,2	12,0	10,4	8,9	7,4	6,0	4,6	3,2	2,2	1,7	1,3	1,1	0,9	0,8	0,7	0,5	0,4	0,3	0,3	0,2	0,2
2,79	0,0	14,3	12,0	10,5	9,0	7,5	6,1	4,7	3,3	2,3	1,8	1,2	1,0	0,8	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,0	0,0

TAB. 3 – Pourcentage d'augmentation du coût en fonction du pourcentage de diminution des rejets de phosphore et d'azote sans phytase

Le Tableau 3 présente les pourcentages d'augmentation du coût d'une diète sans usage de phytase obtenus à l'aide de cette méthode. Le coût minimum de la diète z_1^{min} (i.e. 0 % d'augmentation) est de 0,215 \$/kg pour un rejet d'azote $r_{pr}^{max} = z_2^{max} - b_{pr}^*$ (0% de diminution) de 10,73 g/kg et un rejet de phosphore $r_{ph}^{max} = z_3^{max} - b_{ph}^*$ (0% de diminution) de 2,79 g/kg. Par exemple, pour une réduction de 25 % du rejet d'azote et de 16 % du rejet de phosphore, il y aura 2,5 % d'augmentation du coût.

Le Tableau 4 présente les pourcentages d'augmentation du coût d'une diète avec usage de 750 UP de phytase. Ici le coût minimum de la diète z_1^{min} (i.e. 0% d'augmentation) est de 0,217 \$/kg, pour un rejet d'azote $r_{pr}^{max} = z_2^{max} - b_{pr}^*$ (0% de diminution) de 10,27 g/kg et un rejet de phosphore $r_{ph}^{max} = z_3^{max} - b_{ph}^*$ (0% de diminution) de 1,72 g/kg. Par exemple, pour une réduction de 25% du rejet d'azote et de 16% du rejet de phosphore, il y aura 10% d'augmentation du coût.

Pourcentage (%) d'augmentation du coût (0% = 0,217\$/kg)		Québec, Phase 2, Avril 2003, Phytase (750 UP)													
Rejets de phosphore en g/kg		Rejets d'azote en g/kg													
Pourcentage (%) de diminution		Pourcentage (%) de diminution des rejets d'azote													
1,13	34,4	42,4	39,1	35,9	32,6	29,4	26,1	22,8	19,6	16,3	13,0	9,8	6,5	3,3	0,0
1,19	30,9								15,6	13,7	11,9	10,0	8,4	7,3	7,4
1,25	27,5							15,2	13,3	11,4	9,6	8,0	6,5	5,9	6,1
1,31	24,1					16,7	14,8	13,0	11,1	9,3	7,6	6,1	4,7	4,6	4,8
1,37	20,6				16,4	14,5	12,7	10,8	9,0	7,3	5,7	4,3	3,5	3,4	3,6
1,42	17,2			17,0	14,2	12,4	10,5	8,7	7,0	5,4	3,9	2,9	2,5	2,4	2,4
1,46	15,1			14,8	12,9	11,1	9,2	7,5	5,8	4,2	3,1	2,3	2,0	1,9	1,8
1,48	13,8			13,9	12,1	10,2	8,5	6,7	5,0	3,6	2,7	1,9	1,7	1,6	1,5
1,54	10,3		14,5	11,8	9,9	8,2	6,5	4,7	3,2	2,5	1,8	1,4	1,1	1,1	1,0
1,60	6,9	17,7	12,4	10,4	8,5	6,6	4,7	3,1	2,3	1,8	1,5	1,2	0,9	0,7	0,4
1,66	3,4	16,3	12,2	10,1	8,0	6,1	4,1	2,3	1,9	1,6	1,3	1,0	0,7	0,5	0,2
1,72	0,0	16,2	12,2	10,1	8,1	6,1	4,2	2,3	1,7	1,4	1,1	0,8	0,5	0,3	0,0

TAB. 4 – Pourcentage d'augmentation du coût en fonction du pourcentage de diminution des rejets de phosphore et d'azote avec phytase (750 UP)

7 Conclusion

À l'aide des résultats obtenus avec la programmation linéaire multicritère, un producteur de porcs peut utiliser des diètes pour porcs en croissance favorisant une diminution de la charge environnementale de son système de production en fixant le montant qu'il est prêt à payer, ou qu'il est prêt à recevoir en subsides, pour la réduire. Nous avons constaté que des réductions importantes de rejets d'azote et de phosphore peuvent être obtenues à des coûts relativement faibles. Cette stratégie peut également être utilisée au niveau gouvernemental afin de réduire les effets sur l'environnement des systèmes de production porcine. Ces résultats pourraient être inclus dans une stratégie de contrôle des rejets. Finalement, notons que la méthodologie et les résultats obtenus pour le porc peuvent être utilisés directement pour d'autres productions animales monogastriques.

Cet article résume nos travaux dans ce domaine depuis quelques années [8, 14, 4].

Références

- [1] D. Cluis et P. Couture, Problématiques environnementales des rejets d'élevages porcins intensifs, *Sciences et techniques de l'eau*, 20 (1999), 311-317.
- [2] G.B. Dantzig, *Linear Programming and Extensions*, Princeton Press, Princeton, New Jersey, 1963.

- [3] G.B. Dantzig, The diet problem, *Interfaces*, 20 (1990), 43-47.
- [4] F. Dubeau, P.-O. Julien et C. Pomar, Étude de cas : un porcin dans un environnement sain, *INFOR*, 46 (2008), 199-217.
- [5] Excel[®], Microsoft Corporation, One Microsoft Way, Redmond, WA 98052, USA.
- [6] J.A. Fernandez, H.D. Poulsen, S. Boisen et H.B. Rom, Nitrogen and phosphorus consumption, utilisation and losses in pig production : Denmark, *Livestock Production Science*, 58 (1999), 225-242.
- [7] S.G. Garille et S.I. Gass, Stigler's diet problem revisited, *Operations Research*, 49 (2001), 1-13.
- [8] P. Jean dit Bailleul, J. Rivest, F. Dubeau et C. Pomar, Reducing nitrogen excretion in pigs by modifying the traditional least-cost formulation algorithm, *Livestock Production Science*, 72 (2001), 199-211.
- [9] C. Castrodeza, P. Lara et T. Peña, Multicriteria fractional model for feed formulation : economic, nutritional and environmental criteria, *Agricultural Systems*, 86 (2005), 76-96.
- [10] A.W. Jongbloed et N.P. Lenis, Alteration on nutrition as a means to reduce environmental pollution by pigs, *Livestock Production Science*, 31 (1992), 75-94.
- [11] K.F. Knowlton, J.S. Radcliffe, C.L. Novak et D.A. Emmerson, Animal management to reduce phosphorus losses to the environment, *Journal of Animal Science*, 82 (2004), E173-195.
- [12] L.M. Lancaster, The evolution of the diet model in managing food systems, *Interfaces*, 22 (1992), 59-68.
- [13] L. Le Bellego et J. Noblet, Performance and utilization of dietary energy and amino acids in piglets fed low protein diets, *Livestock Production Science*, 76 (2002), 45-58.
- [14] C. Pomar, F. Dubeau, M.-P. Létourneau, C. Boucher et P.-O. Julien, Reducing phosphorous concentration in pigs diets by adding an environmental objective to the traditional feed formulation algorithm, *Livestock Science*, 111 (2007), 16-27.
- [15] J.F. Patience, P.A. Thacker et C.F.M. de Lange, *Swine Nutrition Guide*, 2nd Edition, University of Saskatchewan, Prairie Swine Center, Saskatoon, Saskatchewan, Canada, 1995.
- [16] H.D. Poulsen, A.W. Jongbloed, P. Latimer et J.A. Fernandez, Phosphorus consumption, utilisation and losses in pig production in France, The Netherlands and Denmark, *Livestock Production Science*, 58 (1999), 251-259.
- [17] C.A. Rotz, Management to reduce nitrogen losses in animal production, *Journal Animal Science*, 82 (2004), E119-137.
- [18] R.E. Steuer, *Multiple Criteria Optimization*, Wiley, New York, 1986.
- [19] R.E. Steuer, *ADBASE : A Multiple Objective Linear Programming Solver for All Efficient Extreme Points and All Efficient Unbounded Edges*, Terry College of Business, University of Georgia, Athens, Georgia, 30602-6253, USA, 2003.
- [20] G.J. Stigler, The cost of subsistence, *Journal of Farm Economics*, 27 (1945), 303-314.
- [21] P.R. Tozer et J.R. Stokes, A multi-objective programming approach to feed ration balancing and nutrient management, The cost of subsistence, *Agricultural Systems*, 67 (2001), 201-215.

- [22] C.M.C. Van der Peet-Schwering, A.J.A. Aarnink, H.B. Rom et J.Y. Dourmad, Ammonia emissions from pig houses in the Netherlands, Denmark and France, *Livestock Production Science*, 58 (1999), 265-269.
- [23] J.W. Wilton, C.A. Morris, E.A. Jenson, A.O. Leigh et W.C. Pfeiffer, A linear programming model for beef cattle production, *Canadian Journal of Animal Science*, 54 (1974), 693-707.