Concours de l'Association mathématique du Québec 2008
Ordre collégial

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours ; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.

Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

Note : *L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

---

1. Le nombre gigantesque

Le nombre $2007^{2008} + 2008^{2007}$ est très grand : il faut exactement 6632 chiffres pour l'écrire au long, en base 10. Par quel chiffre se termine-t-il (autrement dit : quel est son chiffre des unités) ?

Esquisse de solution :

Il est clair que le dernier chiffre de $2007^{2008}+2008^{2007}$ est le même que le dernier chiffre de $7^{2008}+8^{2007}$ (en effet, $2007^{2008} = (2000 + 7)^{2008}$ et en développant le binôme, tous les termes sauf 7^{2008} sont des multiples de 2000, donc leur chiffre des unités est zéro ; semblablement pour le terme 2008^{2007}).

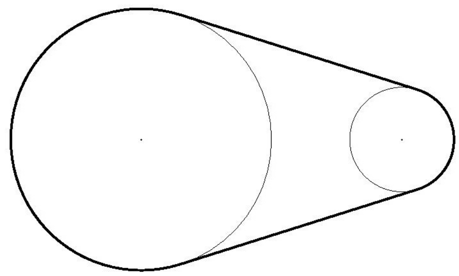
Les premières puissances de 7 sont $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$. Le chiffre des unités de 7^n se répète selon le motif $7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, \ldots$ Puisque 2008 est un multiple de 4, son chiffre des unités est 1.

De même, les premières puissances de 8 sont $8^1 = 8$, $8^2 = 64$, $8^3 = 512$, $8^4 = 4096$, $8^5 = 32768$. Le chiffre des unités de 8^n se répète selon le motif $8, 4, 2, 6, 8, 4, 2, 6, \ldots$ Puisque 2007 est un de moins qu'un multiple de 4, son chiffre des unités est 2.

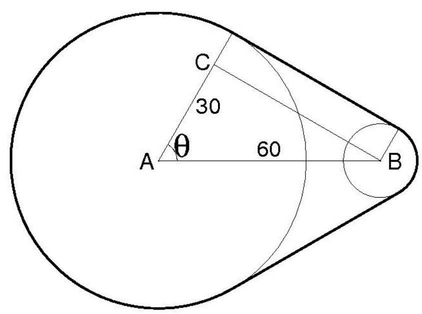
Le chiffre des unités de $2007^{2008} + 2008^{2007}$ est donc $1 + 2 = 3$.

2. La courroie

Deux poulies circulaires sont reliées par une courroie bien tendue comme dans la figure suivante. Les poulies sont de rayons 40 cm et 10 cm ; leurs centres sont distants de 60 cm. Quelle est la longueur de la courroie ?



Esquisse de solution :



Dans la figure ci-dessus, on a tracé deux rayons aux points de tangence. Le triangle ABC est rectangle en C. Par Pythagore, on a $BC = \sqrt{60^2 - 30^2} = 30\sqrt{3}$. C'est la longueur de chacune des deux parties droites de la courroie.

De plus, puisque l'hypoténuse AB mesure le double du côté AC, on a $\theta = 60°$, de sorte que la courroie décrit un arc de $360 - 2 \times 60 = 240$ degrés (deux tiers de circonférence) autour de la grande poulie, et donc de 120 degrés (un tiers de circonférence) autour de la petite poulie.

La longueur totale de la poulie est donc

$$2 \times 30\sqrt{3} + \frac{2}{3} \times 2\pi \times 40 + \frac{1}{3} \times 2\pi \times 10 = 60(\sqrt{3} + \pi) \text{ cm.}$$

3. Les cubes consécutifs

Démontrez que la somme des cubes d'entiers consécutifs strictement plus grands que 1 n'est jamais un nombre premier.

Esquisse de solution :

Soit $1 < m < n$ des entiers. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{n} i^3 &= \left(\sum_{i=1}^{n} i^3\right) - \left(\sum_{i=1}^{m-1} i^3\right) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{m(m-1)}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2}\right)\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2}\right)\end{aligned}$$

et on a écrit la somme comme un produit d'entiers plus grands que 1. Ce n'est donc pas un nombre premier.

4. Les paniers de pommes

Il y a deux paniers identiques. L'un contient 4 pommes rouges et 3 pommes vertes, l'autre contient 2 pommes rouges et 3 pommes vertes. Quelqu'un choisit un panier au hasard et vous l'apporte. Vous tirez une pomme de ce panier.

(a) Quelle est la probabilité que ce soit une pomme rouge ?

Vous regardez et la pomme que vous avez tirée est rouge. Elle est appétissante. Vous la mangez ; effectivement, elle est délicieuse. Vous tirez ensuite une seconde pomme du même panier.

(b) Quelle est la probabilité que ce soit une pomme rouge ?

Esquisse de solution :

(a) Soit R l'événement « tirer une pomme rouge », A l'événement « choisir le premier panier »et B l'événement « choisir le deuxième panier ». On sait que $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$, et on connaît aussi les probabilités conditionnelles $\mathrm{P}(R \mid A) = \frac{4}{7}$ et $\mathrm{P}(R \mid B) = \frac{2}{5}$. On cherche $\mathrm{P}(R)$. Puisque A et B forment une partition, la formule de probabilité totale s'applique et on a

$$\mathrm{P}(R) = \mathrm{P}(R \mid A) \cdot \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(R \mid B) \cdot \mathrm{P}(B) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{35}\,.$$

(b) Le premier panier contenait une plus grande proportion de pommes rouges que l'autre, donc le fait d'avoir tiré une pomme rouge vient augmenter la probabilité de l'avoir choisi. Utilisons la formule de Bayes pour trouver $\mathrm{P}(A \mid R)$, la probabilité qu'on ait choisi le premier panier sachant qu'on vient de tirer une pomme rouge. C'est

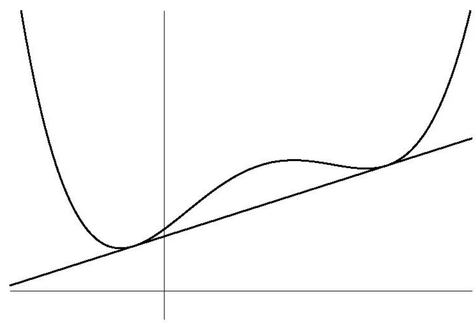
$$\mathrm{P}(A \mid R) = \frac{\mathrm{P}(R \mid A) \cdot \mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(R)} = \frac{\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{17}{35}} = \frac{10}{17}\,.$$

En considérant maintenant que $\mathrm{P}(A) = 10/17$ et $\mathrm{P}(B) = 7/17$, et sans oublier qu'il y a une pomme rouge de moins, la probabilité que la deuxième pomme soit rouge est

$$\mathrm{P}(R) = \mathrm{P}(R \mid A) \cdot \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(R \mid B) \cdot \mathrm{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{17} + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{17} = \frac{27}{68}\,.$$

5. La pente de la bitangente

Une *bitangente* à une courbe est une droite qui lui est tangente en deux points distincts. Le graphique ci-dessous illustre l'unique bitangente à la courbe d'équation $y = x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 10x + 11$. Quelle est la pente de la bitangente ?



Esquisse de solution :

Pour que la droite $y = ax + b$ soit bitangente à la courbe $y = f(x)$, donnée, il faut et il suffit que le polynôme $f(x) - (ax + b)$ possède deux racines doubles, autrement dit qu'il existe u et v (les abscisses des points de tangence) tels que

$$x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 10x + 11 - (ax + b) = (x - u)^2(x - v)^2$$

ou, en développant,

$$\begin{aligned} &x^4 - 5x^3 + 4x^2 + (10 - a)x + (11 - b) \\ &\qquad = x^4 + (-2u - 2v)x^3 + (u^2 + 4uv + v^2)x^2 + (-2uv^2 - 2u^2v)x + u^2v^2. \end{aligned}$$

En posant l'égalité des coefficients, on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} -5 = -2u - 2v \\ 4 = u^2 + 4uv + v^2 \\ 10 - a = -2uv^2 - 2u^2v \\ 11 - b = u^2v^2 \end{cases} \iff \begin{cases} 5 = 2(u + v) \\ 4 = (u + v)^2 + 2uv \\ a = 10 + 2uv(u + v) \\ 11 - b = u^2v^2 \end{cases}$$

La première équation donne $u + v = \frac{5}{2}$, et par remplacement dans la deuxième on trouve $uv = -\frac{9}{8}$. La troisième équation donne alors $a = 10 - \frac{9}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{35}{8}$ qui est la pente cherchée.

6. La serrure

Dans certains bâtiments, on rencontre des portes munies d'une serrure numérique à cinq boutons. Les combinaisons de cette serrure sont formées d'une séquence de mouvements (au moins un). Il y a deux sortes de mouvements : soit on appuie sur un seul bouton, soit on appuie sur deux boutons en même temps. Un bouton donné n'est jamais appuyé plus d'une fois durant une combinaison. Certaines combinaisons n'utilisent pas tous les boutons. L'ordre des mouvements est important. Combien de combinaisons différentes y a-t-il ?

Esquisse de solution :

Si on note S une pression simple (un bouton) et D une pression double (deux boutons en même temps), les combinaisons possibles sont S, SS, SSS, SSSS, SSSSS, D, DS, DSS, DSSS, DD, DDS ainsi que leurs anagrammes (puisque l'ordre importe). On peut construire la table suivante. Notez que le choix d'un bouton double se fait à l'aide d'une combinaison puisque l'ordre n'est pas important dans un bouton double (appuyer 2 et 3 ensemble est la même chose que 3 et 2 ensemble) tandis que le choix des boutons simples se fait à l'aide d'un arrangement puisque l'ordre des boutons est important (2 puis 3 n'est pas la même chose que 3 puis 2).

Type de combinaison	Nombre d'anagrammes	Choix des boutons	Nombre de combinaisons
S	$1!/1! = 1$	$A_1^5 = 5$	$1 \cdot 5 = 5$
SS	$2!/2! = 1$	$A_2^5 = 20$	$1 \cdot 20 = 20$
SSS	$3!/3! = 1$	$A_3^5 = 60$	$1 \cdot 60 = 60$
SSSS	$4!/4! = 1$	$A_4^5 = 120$	$1 \cdot 120 = 120$
SSSSS	$5!/5! = 1$	$A_5^5 = 120$	$1 \cdot 120 = 120$
D	$1!/1! = 1$	$C_2^5 = 10$	$1 \cdot 10 = 10$
DS	$2! = 2$	$C_2^5 \cdot A_1^3 = 30$	$2 \cdot 30 = 60$
DSS	$3!/2! = 3$	$C_2^5 \cdot A_2^3 = 60$	$3 \cdot 60 = 180$
DSSS	$4!/3! = 4$	$C_2^5 \cdot A_3^3 = 60$	$4 \cdot 60 = 240$
DD	$2!/2! = 1$	$C_2^5 \cdot C_2^3 = 30$	$1 \cdot 30 = 30$
DDS	$3!/2! = 3$	$C_2^5 \cdot C_2^3 \cdot A_1^1 = 30$	$3 \cdot 30 = 90$

Il y a donc, au total, $5 + 20 + 60 + 120 + 120 + 10 + 60 + 180 + 240 + 30 + 90 = 935$ combinaisons. Ce genre de serrure n'est donc pas très sécuritaire : on peut essayer toutes les combinaisons en une heure ou deux.

Résultats du concours 2008 – Ordre collégial		
Position	**Nom**	**Institution**
1	JZAKHAROV Pavel	Collège Vanier
2	LVOV Nikita	Collège Marianopolis
3	MERCIER Olivier	Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne
4	Fei JU Hong	Collège Marianopolis
5 à 7	LI Ran	Collège Marianopolis
5 à 7	SONG Ziqi	Collège Marianopolis
5 à 7	WEN Heming	Collège Vanier
8 à 10	SIMONEAU Karl-Antoine	Cégep de Sherbrooke
8 à 10	HU Zheping	Collège Marianopolis
8 à 10	STICEA Paul	Collège Vanier
11 et 12	CHEN Xin Chi	Collège Marianopolis
11 et 12	MITRIC Christina	Collège Marianopolis
13 et 14	MASSICOTTE-TISLUCK Karine	Collège de Maisonneuve
13 et 14	MA Davis	Collège Marianopolis
15 à 18	MICHAUD-RIOUX Vincent	Cégep de Rimouski
15 à 18	VALLÉE Michaël	Cégep de Sherbrooke
15 à 18	BÉDARD Charles-Alexandre	Collège de Maisonneuve
15 à 18	MENG Ye	Collège Marianopolis
19 à 22	THIBAULT Louis-Philippe	Collège André-Grasset
19 à 22	NICOLAU Stefan	Collège Jean-de-Brébeuf
19 à 22	SPENCE Stuart	Collège Héritage
19 à 22	HU Zhebin	Collège Marianopolis
23 à 25	LATENDRESSE Olivier	Collège de Bois-de-Boulogne
23 à 25	BRAULT Marc-Olivier	Collège de Maisonneuve
23 à 25	ATOYAN Levon	Collège Marianopolis
26 à 31	MORNEAU-GUÉRIN Frédéric	Cégep de Ste-Foy
26 à 31	BERGERON-LAPIERRE Vanessa	Cégep de St-Laurent
26 à 31	CHOINIÈRE Jean-Philippe	Cégep de Granby – Haute-Yamaska
26 à 31	TREMBLAY Vincent	Collège de Chicoutimi
26 à 31	DUBÉ Mathieu	Collège François-Xavier-Garneau
26 à 31	JACOBSON Matthew	Collège Marianopolis