
Concours de l'Association mathématique du Québec 2008

Ordre collégial

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours ; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.

Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

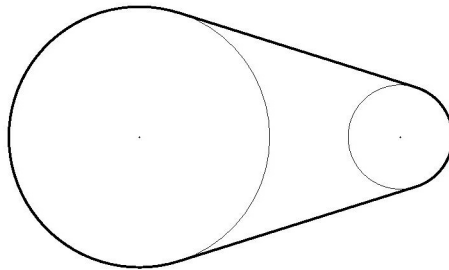
Note : *L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

1. Le nombre gigantesque

Le nombre $2007^{2008} + 2008^{2007}$ est très grand : il faut exactement 6632 chiffres pour l'écrire au long, en base 10. Par quel chiffre se termine-t-il (autrement dit : quel est son chiffre des unités) ?

2. La courroie

Deux poulies circulaires sont reliées par une courroie bien tendue comme dans la figure suivante. Les poulies sont de rayons 40 cm et 10 cm ; leurs centres sont distants de 60 cm. Quelle est la longueur de la courroie ?



3. Les cubes consécutifs

Démontrez que la somme des cubes d'entiers consécutifs strictement plus grands que 1 n'est jamais un nombre premier.

4. Les paniers de pommes

Il y a deux paniers identiques. L'un contient 4 pommes rouges et 3 pommes vertes, l'autre contient 2 pommes rouges et 3 pommes vertes. Quelqu'un choisit un panier au hasard et vous l'apporte. Vous tirez une pomme de ce panier.

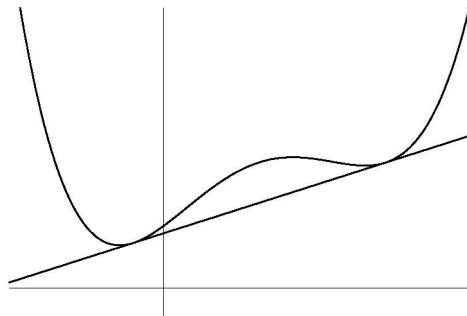
(a) Quelle est la probabilité que ce soit une pomme rouge ?

Vous regardez et la pomme que vous avez tirée est rouge. Elle est appétissante. Vous la mangez ; effectivement, elle est délicieuse. Vous tirez ensuite une seconde pomme du même panier.

(b) Quelle est la probabilité que ce soit une pomme rouge ?

5. La pente de la bitangente

Une *bitangente* à une courbe est une droite qui lui est tangente en deux points distincts. Le graphique ci-dessous illustre l'unique bitangente à la courbe d'équation $y = x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 10x + 11$. Quelle est la pente de la bitangente ?



6. La serrure

Dans certains bâtiments, on rencontre des portes munies d'une serrure numérique à cinq boutons. Les combinaisons de cette serrure sont formées d'une séquence de mouvements (au moins un). Il y a deux sortes de mouvements : soit on appuie sur un seul bouton, soit on appuie sur deux boutons en même temps. Un bouton donné n'est jamais appuyé plus d'une fois durant une combinaison. Certaines combinaisons n'utilisent pas tous les boutons. L'ordre des mouvements est important. Combien de combinaisons différentes y a-t-il ?