Association Mathématique du Québec

Enseignement

L'approche par problème vécue par le professeur et par les élèves : peut-on faire casser un verre de cristal avec une onde sonore ?

Nicolas Pfister,
Cégep de Sherbrooke
Audrey Corbeil-Therrien, Guillaume Lapointe
et Geneviève Vézina,
étudiants, Cégep de Sherbrooke

Note de l'éditeur : le point de départ de ce texte est le résumé d'un projet réalisé par trois (bons) élèves, Audrey Corbeil-Therrien, Guillaume Lapointe et Geneviève Vézina, dans le cadre d'un cours d'intégration du programme de Sciences de la nature au Cégep de Sherbrooke. Ce résumé a été rédigé par les élèves à la suite de la présentation de leur projet lors d'un atelier au 49^{e} congrès de l'Association mathématique du Québec à Sherbrooke en 2006 et à ce titre figure dans les actes de ce congrès. Afin que le lecteur soit en mesure d'évaluer l'intérêt du travail présenté, nous avons demandé au professeur responsable de ce projet, Nicolas Pfister, d'écrire un texte d'introduction décrivant les conditions de réalisation du projet.

Introduction : l'approche par problème vécue par le professeur : le contexte, l'encadrement offert et un exemple d'intervention du professeur.
Par Nicolas Pfister, professeur au Cégep de Sherbrooke.

Les paragraphes qui suivent décrivent le contexte du cours dans lequel ce projet a été réalisé et donnent un aperçu du niveau d'encadrement offert par l'enseignant qui supervisait ce projet. On complètera cette introduction en présentant un exemple d'intervention de l'enseignant sur une partie du travail des élèves.

CONTEXTE

Tous les élèves qui terminent le programme de Sciences de la nature au Cégep de Sherbrooke doivent suivre le cours d'intégration *Projet de fin d'études*. Chaque élève, lors de son inscription à ce cours doit annoncer un ordre de préférence entre les disciplines biologie, chimie, mathématiques et physique. La répartition des élèves dans les différents groupes se fait alors selon les demandes des élèves et l'offre des groupes disponibles. Notons ici que les élèves qui ont courageusement coché comme premier choix la discipline mathématique l'obtiennent systématiquement alors que ce n'est pas le cas des autres disciplines. Les élèves du cours *Projet de fin d'études* ayant suivi un cheminement régulier dans le programme de Sciences de la nature ont préalablement suivi un cours de calcul différentiel et un cours de calcul intégral ainsi qu'un cours de probabilités et statistiques. Environ la moitié des élèves a également suivi un cours d'algèbre linéaire à la session précédente alors que l'autre moitié va le suivre en même temps que le cours *Projet de fin d'études*. Les trois élèves qui ont réalisé ce projet suivaient en même temps le cours d'algèbre linéaire.

ENCADREMENT

La forme que prend le cours *Projet de fin d'études* associé à la discipline mathématique est assez différente de celle prise par le cours *Projet de fin d'études* associé aux trois autres disciplines du programme. En général, dans ces disciplines, le projet consiste à examiner une problématique donnée avec un objectif particulier à atteindre. Le travail correspond alors à trouver une façon de résoudre « coûte que coûte » cette problématique, la fin justifiant les moyens. À l'inverse, dans la discipline mathématique, il serait plus convenable de dire que pour le cours *Projet de fin d'études*, **les moyens justifient la fin**, celle-ci n'étant en fait qu'un prétexte. Dans cette discipline, plutôt que de suggérer une problématique particulière avec un objectif à atteindre, on propose à l'élève une exploration d'un domaine à partir d'une série de questions réparties en quatre ou cinq sections formant une sorte de canevas de travail sur lequel va s'appuyer le projet à réaliser. Chacune des questions permet d'orienter les recherches en proposant l'examen de points particuliers du domaine d'étude tout en laissant à l'élève une grande autonomie dans son cheminement individuel. Certaines questions vont rester en suspens un certain temps, d'autres ne seront jamais complètement résolues, mais toutes ont un lien, que ce soit à partir du résultat obtenu ou de la méthode employée. Ces liens entre les questions du canevas de travail ne sont toutefois jamais faits explicitement et on essaie notamment d'éviter autant que possible toute référence trop explicite à un résultat précis ou à une notion particulière, afin d'encourager l'élève à proposer une réflexion originale et personnelle basée essentiellement sur ses connaissances antérieures. Bien que les questions puissent amener l'élève à appliquer une méthode dans un cadre particulier ou encore à chercher à expliquer le pourquoi d'un résultat, l'objectif du projet reste la construction d'un certain savoir de façon aussi autonome que possible. On observera, par exemple, que dans le texte proposé par les trois élèves, en aucun temps le nom de Fourier n'apparaît, bien que l'on puisse reconnaître dans ce travail une construction du savoir associé à l'analyse harmonique et en particulier aux séries de Fourier. Il va sans dire que les questions du canevas de travail n'en font jamais mention non plus.

Ces dernières années, trois sujets d'exploration ont été proposés aux élèves du cours *Projet de fin d'études* en mathématiques : la transmission de l'information, les dynamiques de populations et la théorie de l'approximation. Le premier sujet a pour objets d'étude la notion de distance, les espaces vectoriels, les sous-espaces orthogonaux et les corps finis. Le prétexte de ces objets d'étude est la capacité à protéger l'information d'erreurs pouvant résulter de sa transmission dans un canal soumis à un certain niveau de perturbations. Le deuxième sujet est une étude comparative du comportement qualitatif et quantitatif de quelques équations différentielles et des équations aux différences finies qui leur correspondent. Les dynamiques de populations sous différentes hypothèses : possibilité d'immigration, disponibilité des ressources, interaction avec d'autres populations, etc..., forment le prétexte de ce sujet. Quant au sujet choisi par les trois élèves, ces objets d'étude sont la projection orthogonale, les espaces et sous-espaces vectoriels et les espaces fonctionnels. Le prétexte du troisième sujet est l'analyse harmonique d'un signal sonore et sa reproduction. Chacun de ces projets comporte également une composante expérimentale. Celui sur la transmission de l'information propose aux élèves d'utiliser Maple pour leur permettre d'élaborer un programme simulant un canal de transmission bruité afin de tester les résultats obtenus sur la possibilité de protéger l'information à transmettre. Une des équipes qui a réalisé le projet sur les dynamiques de populations s'est lancée dans l'élevage d'hydres (minuscules anémones d'eau douce) et de daphnies (crevettes d'eau douce encore plus minuscules et qui servent de proie aux hydres) sur une période de deux mois et demi, afin de comparer leurs résultats théoriques avec le comportement de ces populations. Le projet sur la théorie de l'approximation demande aux élèves qu'ils aillent au studio d'enregistrement du cégep afin de réaliser, avec l'aide des élèves du département de musique, la captation d'un signal sonore pour ensuite tenter de le reproduire informatiquement.

Lors de la première rencontre en classe et une fois la présentation des projets par le professeur complétée, les élèves du groupe se répartissent en six équipes de trois ou quatre selon leur nombre et leurs intérêts, puis choisissent le sujet qu'ils souhaitent explorer. Chaque équipe doit alors déterminer un responsable d'équipe, un responsable de la rédaction du rapport et un responsable de la présentation orale pour la première section du travail. Le rôle du responsable de l'équipe, en plus de veiller au bon fonctionnement de l'équipe, est de tenir à jour un journal de bord dans lequel il inscrit les moments et les durées des rencontres, les éléments discutés et les orientations prises, les difficultés rencontrées et l'état des travaux. Le responsable de la rédaction du rapport doit assembler et organiser les résultats obtenus par l'équipe, identifier les sources ou les références s'il y a lieu et rédiger la section du rapport en s'assurant de donner une forme unifiée au document. Le responsable de la présentation orale de cette section aura la tâche de préparer les documents et le matériel qui serviront à la présentation des résultats. Afin de répartir la charge de travail le plus équitablement possible, les membres de l'équipe devront s'assurer de tenir des rôles différents pour chacune des sections du travail.

Lors des semaines suivantes, on exige que tous les membres de chacune des équipes soient présents aux trois heures de rencontres hebdomadaires en classe. Il peut toutefois y avoir exception lorsque les équipes en sont à la réalisation de la composante expérimentale du projet. Pour les 3h/sem. qui restent, les équipes sont libres d'établir leur propre organisation du temps. Chaque semaine, pendant la rencontre en classe, l'enseignant consacre en moyenne 30 minutes à chacune des équipes. La rencontre commence par un résumé de l'état des travaux présenté par l'actuel responsable de l'équipe. Pour l'enseignant, ce résumé permet de noter la direction prise par l'équipe dans son exploration du sujet. Pour les membres de l'équipe, cela permet de vérifier s'ils ont à peu près tous la même compréhension du travail réalisé jusqu'à maintenant. Le résumé oblige également le responsable de l'équipe à formuler les résultats obtenus dans un langage moins formel que l'écrit et l'incite à présenter une vue relativement globale de l'état de la recherche. En obligeant l'élève à s'éloigner des résultats particuliers, on souhaite finalement l'aider à établir des liens entre les différentes idées examinées jusqu'alors. La deuxième partie de la rencontre consiste à demander aux élèves quelles sont les pistes qu'ils envisagent d'explorer au cours de la semaine suivante. Afin d'éviter d'intervenir trop directement sur certaines propositions des élèves et de garder une distance face aux questions du canevas de travail, l'enseignant, dans la plupart des cas, va simplement suggérer à l'élève d'aller voir ce que dit l'auteur de son livre d'algèbre linéaire par exemple. À la cinquième semaine, on demande aux équipes de remettre un rapport préliminaire de l'état des travaux. Il ne s'agit pas ici de vérifier si les élèves ont la bonne réponse aux questions du canevas de travail mais plutôt de s'assurer que la rédaction du rapport respecte un niveau de rigueur et de formalisme suffisant.

EXEMPLE D'INTERVENTION DE L'ENSEIGNANT

Pour terminer l'introduction au texte des trois élèves, voici un exemple de question du canevas de travail qui a servi à la réalisation de leur projet et une illustration d'un type d'intervention possible de la part de l'enseignant.

Une grande partie du travail portant sur la théorie de l'approximation tourne autour de la notion de projection orthogonale et l'un des moments clés apparaît au moment où il s'agit de faire vivre dans un espace de dimension plus grande cette notion préalablement définie dans un espace de dimension inférieure lors du cours d'algèbre linéaire. Cette progression apparaît dans les deux questions suivantes :

6. *Dans R^3, rapporté à la base orthonormée directe habituelle $\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$, considérons les vecteurs $\vec{e} = (1, -1, 1)$ et $\vec{v} = (1, 2, 3)$.*

   (La question a) consiste à définir le sous-espace vectoriel E de R^3 engendré par le vecteur $\vec{e}$.)

   b) Déterminer la projection orthogonale $\vec{v}_0$ de $\vec{v}$ dans la direction de $\vec{e}$ ainsi que le vecteur complément orthogonal $\vec{v}_1$ tel que $\vec{v}_0 + \vec{v}_1 = \vec{v}$.

7. *Toujours dans R^3, un problème qui serait semblable à celui traité à la question 6 serait de décomposer le vecteur $\vec{v}$ en une somme de deux vecteurs $\vec{v}_0$ et $\vec{v}_1$ tels que $\vec{v}_0$ soit dans un certain sous-espace plan E et $\vec{v}_1$ soit orthogonal à ce plan. On appellerait $\vec{v}_0$ la projection orthogonale de $\vec{v}$ dans le plan E. Soit E le sous-espace de R^3 engendré par les vecteurs $\vec{e}_1 = (1, -1, 1)$ et $\vec{e}_2 = (1, -1, -2)$.*

   (La question a) consiste à étudier la possibilité que $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ forment une base de E et la nature éventuelle de cette base.)

   b) Décomposer le vecteur $\vec{v} = (1, 1, 1)$ comme une somme de deux vecteurs, l'un $\vec{v}_0$ dans E et l'autre $\vec{v}_1$ orthogonal à tout vecteur de E.

La question 6b) ne présente aucune difficulté pour l'élève. Si la définition formelle de la projection orthogonale d'un vecteur sur un autre reste encore une notion plutôt obscure et surtout en apparence totalement inutile, le schème de pensée associé au calcul de la projection orthogonale d'un vecteur sur un autre est habituellement parfaitement intégré par l'élève à ce stade-ci. Par contre, le passage à la question 7b) présente un obstacle : l'élève ne dispose plus de formule de calcul lui permettant de résoudre directement le problème. Aucun élève ne songe évidemment à aller consulter son manuel d'algèbre linéaire et le premier réflexe de l'élève est d'« étendre » la formule de calcul de la projection orthogonale : si elle fonctionne pour un vecteur pourquoi ne fonctionnerait-elle pas pour deux ? Malheureusement le résultat obtenu par extension de la formule est effectivement le bon. Une intervention en deux étapes de l'enseignant est alors nécessaire. Dans un premier temps, on peut demander à l'élève, par exemple, si la nature de la base (question 7a)) joue un rôle dans le résultat qu'il vient d'obtenir. Évidemment cette exploration n'est pas simple pour l'élève : si l'examen d'une base orthonormée associée au sous-espace E ne pose pas trop de difficultés, l'étude d'une base quelconque (non orthogonale) de E exige une certaine exploration numérique de sa part. On peut observer ici que la difficulté supplémentaire associée à l'exploration dans le cas de la base quelconque suggère que les conséquences de la propriété de fermeture de l'addition vectorielle d'un sous-espace sont plus difficiles à envisager pour l'élève que celles de la propriété de fermeture de la multiplication par un scalaire. Dans un deuxième temps, on peut suggérer à l'élève de consulter son manuel d'algèbre linéaire et de regarder comment est effectué le passage de la définition de la projection orthogonale d'un vecteur sur un autre à la formule de calcul de la projection orthogonale. Il faut alors proposer à l'élève d'essayer de reformuler la définition dans le cas d'un sous-espace de dimension supérieure et d'en examiner les conséquences sur la formule de calcul qui en découle. C'est une partie du cheminement que les trois élèves ont suivi lors de la réalisation de leur projet et dont le résumé est présenté dans le texte suivant.

L'approche par problème vécue par les élèves : peut-on faire casser un verre de cristal avec une onde sonore ?

Par Audrey Corbeil-Therrien, Guillaume Lapointe et Geneviève Vézina, étudiants au Cégep de Sherbrooke

Est-il possible de faire éclater un verre de cristal par la reproduction d'un signal sonore provenant de ce verre ? C'est que nous avons voulu découvrir lors du projet de fin d'études 2006 en mathématiques. La partie expérimentale de ce projet consistait à faire l'enregistrement analogique d'un signal sonore émis par un verre de cristal et à le reproduire par la suite. Pour ce faire, nous avons dû développer des outils mathématiques, grâce à l'algèbre linéaire, au calcul différentiel et intégral, plus particulièrement grâce aux concepts d'espace vectoriel, de vecteur, de base, de produit scalaire et d'intégration numérique, pour ainsi aboutir à la théorie de l'approximation linéaire. Cette dernière nous a permis d'établir une approximation numérique du signal enregistré pour ainsi le reproduire. Le verre de cristal a-t-il résisté à ce signal ou a-t-il éclaté ? C'est ce que vous pourrez découvrir . . . !

Dans le cadre de notre cours de projet de fin d'études, lors de notre dernière session en sciences de la nature au Cégep de Sherbrooke, nous avons élaboré un projet en mathématiques. Nous avons choisi d'enrichir l'un des projets offerts qui, au départ, consistait à capter un signal sonore et à en faire l'analyse harmonique dans le but de le reproduire. En plus de faire la captation, l'analyse et la reproduction d'un signal sonore, nous avons également tenté de vérifier si l'histoire de la chanteuse qui réussit à casser un verre en chantant est un mythe ou une réalité, s'il est vraiment possible de briser un verre de cristal avec une onde sonore.

Un verre de cristal a des fréquences auxquelles il vibre plus efficacement. Autrement dit, lorsque le verre est heurté, ou encore frotté avec un doigt humide, il dissipe son énergie via ces fréquences sous forme d'onde sonore et lorsque de l'énergie sonore lui est transmise selon ces fréquences, il accumule cette énergie, vibrant de plus en plus fort, jusqu'à ce que le matériau ne le supporte plus. C'est ce que l'on appelle résonance et c'est ce phénomène que nous allons tenter de mettre à profit pour casser notre verre.

Il faudra donc effectuer un enregistrement du signal sonore émis par le verre de cristal lorsque celui-ci vibre naturellement et recréer ce signal à l'aide de méthodes mathématiques. Dans le cadre de ce projet, nous avons privilégié une approche vectorielle.

Tout d'abord, l'enregistrement a été effectué à l'aide du programme Vizu, un programme informatique qui a transformé les variations de pression selon le temps, c'est-à-dire le son, en une série de points sur un graphique. Le son a été produit par friction d'un doigt humidifié sur le rebord du verre. Cela donne un son plus continu, avec moins de variations que les autres méthodes auxquelles nous avions songé. Ce son a ensuite été capté à l'aide d'un micro.

L'analyse de ce graphique (figure 1) montre une période de 0,00212 secondes, ou encore une fréquence fondamentale de 471 Hz. Afin de reproduire ce signal, il faut trouver la fonction se rapprochant le plus des points du graphique. Puisqu'il s'agit d'un signal de nature périodique (vibrations sonores), les fonctions sinusoïdales ont été retenues.

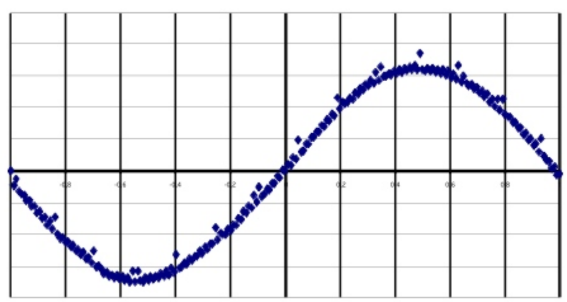

Fig. 1 Pression en fonction du temps sur une période du signal sonore du verre de cristal

Nous nous sommes basés sur certaines notions d'algèbre linéaire acquises préalablement à ce projet : les espaces vectoriels et les caractéristiques de leurs bases, les combinaisons linéaires, ainsi que le produit scalaire et la projection orthogonale d'un vecteur sur un autre. Toutefois, ces notions ne sont pas suffisantes pour résoudre le problème posé.

Le premier obstacle a été de rapprocher les notions de vecteur et de fonction. Nous avons donc vérifié si les fonctions pouvaient se comporter comme des vecteurs, c'est-à-dire si elles possédaient les mêmes propriétés que ces derniers. Après l'analyse de différents cas, nous en sommes arrivés à l'élaboration du théorème suivant : « Un sous-ensemble est un sous-espace vectoriel s'il fait partie d'un plus grand espace vectoriel tel que les propriétés de fermeture de l'addition et de la multiplication par un scalaire sont vérifiées ». En acceptant le fait que l'ensemble des fonctions réelles dans les réels forment un espace vectoriel, le théorème précédent nous permet d'affirmer que l'ensemble de tous les polynômes trigonométriques de degré n ou moins de la forme :

$$P(x) = a_0 + a_1 \cos \pi x + a_2 \cos 2\pi x + \ldots + a_n \cos n\pi x + b_1 \sin \pi x + b_2 \sin 2\pi x + \ldots + b_n \sin n\pi x$$

est également un espace vectoriel. En effet, l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré n ou moins fait partie d'un espace vectoriel plus grand, soit les fonctions réelles dans les réels, et les propriétés de fermeture de l'addition et de la multiplication par un scalaire sont vérifiées pour cet ensemble. Nous noterons P cet espace dont la dimension est $2n + 1$. Nous pouvons maintenant travailler dans l'espace vectoriel P.

Ensuite, pour pouvoir reproduire le plus fidèlement le son du verre, il faut trouver la fonction « la plus proche » de celle de notre signal sonore, soit le polynôme trigonométrique approchant le mieux le graphique. Pour ce faire, il est possible d'utiliser le concept de projection orthogonale, qui permet de trouver le vecteur d'un sous-espace « le plus proche » d'un vecteur donné. Autrement dit, il s'agit de trouver une fonction dans l'espace des polynômes trigonométriques qui sera la « plus semblable » au graphique représentant le signal sonore. Toutefois, nous devons appliquer ici la projection orthogonale à un espace vectoriel de dimension $2n + 1$, au lieu d'un espace de dimension 1 comme nous l'avions appris auparavant. Pour développer ce nouveau concept que nous ne connaissions pas, nous nous sommes basés sur la définition suivante de la projection orthogonale d'un vecteur sur un autre [1] :

> *Soit deux vecteurs non nuls, $\vec{v}$ et $\vec{u}$ non parallèles et non orthogonaux; la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$ (notée $\vec{v}_{\vec{u}}$) est l'unique vecteur pour lequel*

$$\begin{array}{ll} 1) & \vec{v}_{\vec{u}} \mathbin{//} \vec{u} \\ 2) & \vec{v} - \vec{v}_{\vec{u}} \perp \vec{u}. \end{array}$$

Algébriquement, la première condition s'exprime par le fait que la projection $\vec{v}_{\vec{u}}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$: il existe un scalaire k tel que $\vec{v}_{\vec{u}} = k\vec{u}$, alors que l'orthogonalité imposée par la seconde condition s'écrit $(\vec{v} - \vec{v}_{\vec{u}}) \bullet \vec{u} = 0$.

Nous avons donc proposé une généralisation de cette définition pour pouvoir l'appliquer à un espace quelconque E de dimension n. Nous obtenons :

> « *Soit un vecteur $\vec{v}$ d'un espace W et soit E un sous-espace de dimension n, muni d'une base $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$. La projection orthogonale de $\vec{v}$ sur E est l'unique vecteur $\vec{v}_E$ pour lequel*
>
> 1) $\vec{v}_E \in E$
>
> 2) $\vec{v} - \vec{v}_E \perp E$. »

Dans cette généralisation, la première condition se traduit par le fait que la projection $\vec{v}_E$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ de la base de E : il existe donc des scalaires $k_1, \ldots, k_n$ tels que $\vec{v}_E = k_1\vec{v}_1 + \ldots + k_n\vec{v}_n$. La seconde condition exige que le vecteur $\vec{v} - \vec{v}_E$ soit orthogonal à l'espace E. En particulier, il doit être orthogonal à tous les vecteurs de la base de E, ce qui s'écrit

$$(\vec{v} - \vec{v}_E) \bullet \vec{v}_1 = 0, (\vec{v} - \vec{v}_E) \bullet \vec{v}_2 = 0, \ldots, (\vec{v} - \vec{v}_E) \bullet \vec{v}_n = 0.$$

[1]PAPILLON, *Vincent. Vecteurs, matrices et nombres complexes*, Modulo, Mont-Royal, 1993, p. 61.

À partir de cette définition, nous pouvons développer une formule qui nous permettra de calculer la projection orthogonale lorsque la base de E est orthogonale.

Soit $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n \rangle$ une base orthogonale du sous-espace E dans W, soit $\vec{F}$ un vecteur de W et soit $\vec{F}_E$ la projection orthogonale de $\vec{F}$ sur le sous-espace E. La première condition donne $\vec{F}_E = k_1\vec{e}_1 + \ldots + k_n\vec{e}_n$ et la seconde : $(\vec{F} - \vec{F}_E) \bullet \vec{e}_i = 0,\ i = 1, \ldots, n$ devient, après substitution, $(\vec{F} - (k_1\vec{e}_1 + \ldots + k_n\vec{e}_n)) \bullet \vec{e}_i = 0 \quad i = 1, \ldots, n$, c'est à dire

$$\vec{F} \bullet \vec{e}_i - k_1(\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_i) + \ldots + k_n(\vec{e}_n \bullet \vec{e}_i) = 0 \quad i = 1, \ldots, n.$$

Par l'orthogonalité des éléments de la base, on a alors que

$$\vec{F} \bullet \vec{e}_i - k_1(0) + \ldots + k_i\|\vec{e}_i\|^2 + \ldots + k_n(0) \quad i = 1, \ldots, n,$$

d'où

$$k_i = \frac{\vec{F} \bullet \vec{e}_i}{\|\vec{e}_i\|^2} \quad i = 1, \ldots, n,$$

et

$$\vec{F}_E = \frac{\vec{F} \bullet \vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|^2}\vec{e}_1 + \frac{\vec{F} \bullet \vec{e}_2}{\|\vec{e}_2\|^2}\vec{e}_2 + \ldots + \frac{\vec{F} \bullet \vec{e}_k}{\|\vec{e}_n\|^2}\vec{e}_n.$$

On remarque que $\vec{F}_E$ peut aussi s'écrire : $\vec{F}_E = \vec{F}_{\vec{e}_1} + \vec{F}_{\vec{e}_2} + \ldots + \vec{F}_{\vec{e}_n}$, où $\vec{F}_E$ est la projection orthogonale sur la droite engendrée par $\vec{e}_i,\ i = 1, \ldots, n$.

Nous avons maintenant une formule permettant de trouver la projection orthogonale sur un espace. Cependant, cette formule utilise la notion de produit scalaire, une notion que nous n'avons pas définie dans notre espace P des polynômes trigonométriques décrit précédemment. La définition axiomatique du produit scalaire indique qu'il est à la fois commutatif, distributif sur la somme vectorielle et distributif sur la multiplication par un scalaire. De plus, le produit scalaire d'un vecteur avec lui-même donne le carré de sa norme. On peut satisfaire à cette définition si on définit le produit scalaire de deux fonctions f et g par la formule

$$f \bullet g = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Puisque les fonctions de l'espace P sont périodiques de période 2π, nous pouvons les étudier sur une seule période. Nous avons choisi de travailler sur une période étalée de $-\pi$ à π. Par une simple transformation affine il sera possible de se ramener à la période de notre signal. Toutefois, il faut d'abord définir une base orthogonale de l'espace P.

Une base d'un espace vectoriel doit pouvoir engendrer chaque vecteur de cet espace. De plus, chaque élément de la base doit être linéairement indépendant de tous les autres. Si nous regardons l'espace vectoriel formé de tous les polynômes trigonométriques de la forme

$$P(x) = a_0 + a_1 \cos \pi x + a_2 \cos 2\pi x + \ldots + a_n \cos n\pi x + b_1 \sin \pi x + b_2 \sin 2\pi x + \ldots + b_n \sin n\pi x,$$

une base possible serait formée de chacun des monômes, ce qui nous donnerait :

$$B = \{1, \cos(\pi x), \cos(2\pi x), \ldots, \cos(n\pi x)\} \cup \{\sin(\pi x), \sin(2\pi x), \ldots, \sin(n\pi x)\}.$$

Vérifions si cet ensemble respecte les deux conditions. D'abord, en utilisant des combinaisons linéaires, il est possible d'obtenir tous les vecteurs de l'espace. Ensuite, à l'aide du produit scalaire décrit précédemment, il est possible de vérifier l'indépendance linéaire des vecteurs de l'ensemble B. En effet, on peut montrer que le produit scalaire de deux vecteurs distincts quelconques de B est nul, ce qui indique que ces deux vecteurs sont orthogonaux. À l'aide d'un théorème que nous avons élaboré mais que nous ne présentons pas ici, il nous est possible d'affirmer que tout ensemble de vecteurs orthogonaux deux à deux est linéairement indépendant. Donc l'ensemble B respecte les deux conditions lui permettant d'être une base de l'espace des polynômes trigonométriques. De plus, cette base est orthogonale, permettant ainsi de l'utiliser pour la technique de projection orthogonale.

Maintenant on peut appliquer la formule de projection orthogonale de la fonction F sur l'espace P.

Le produit scalaire tel qu'il a été présenté auparavant ne peut être calculé algébriquement, puisque le graphique est constitué de points et non d'une fonction continue. Il faut donc avoir recours à une méthode numérique pour approximer le résultat. Comme méthode d'intégration numérique, notre choix s'est arrêté sur la méthode des trapèzes. Cette méthode nous demande de diviser notre intervalle de temps en plusieurs sous-intervalles de grandeur Δx, la distance entre deux instants. L'aire de chacun des trapèzes formés par deux points consécutifs du graphique est ensuite calculée. La sommation de tous ces trapèzes est une approximation de l'intégrale numérique recherchée. On peut alors approximer le produit scalaire de la fonction f sur un élément g de la base de l'espace P par

$$f \bullet g = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta x(f(x)g(x) + f(x_{i+1})g(x_{i+1}))}{2},$$

où N est le nombre de points sur l'intervalle sur lequel on travaille.

Cette méthode nous permettra d'approximer l'intégrale nécessaire au calcul de la projection orthogonale.

C'est à l'aide du logiciel SystemView que le signal fut reproduit. Ce logiciel permet d'obtenir un fichier sonore de type wav à la sortie, donc un fichier qui pouvait être joué directement dans un haut-parleur. Ci-dessous se trouvent le graphique du signal original et la projection orthogonale de ce signal produit à l'aide de Maple6. Cette projection a été faite avec un polynôme de degré n égal à 80 et l'approximation des intégrales à l'aide de la méthode des trapèzes a été faite avec 182 points.

Enfin, nous avons tenté de casser notre verre de cristal avec le signal sonore. Le verre a répondu au signal, mais sans casser. En effet, le verre s'est mis à vibrer avec intensité sans toutefois éclater. Nous croyons que cela est dû au fait que notre verre n'avait pas de pied et qu'il était impossible de le fixer convenablement. Il dissipait l'énergie par un mouvement latéral par rapport à la surface sur laquelle il était déposé. Il nous est donc impossible d'affirmer que la reproduction du signal sonore permet de casser le verre de cristal. Toutefois, les résultats obtenus laissent un doute. Il faudrait répéter l'expérience avec un verre à pied. L'histoire du verre de cristal brisé par son onde sonore reste donc, pour nous, un mystère.

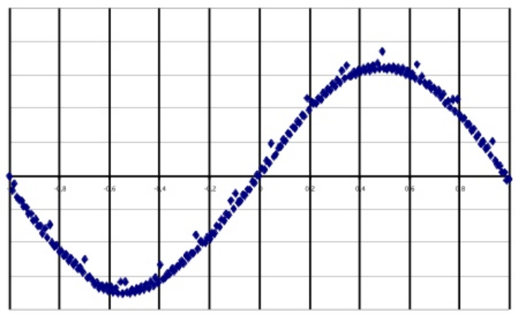

Fig.2 Pression en fonction du temps sur une période du signal sonore

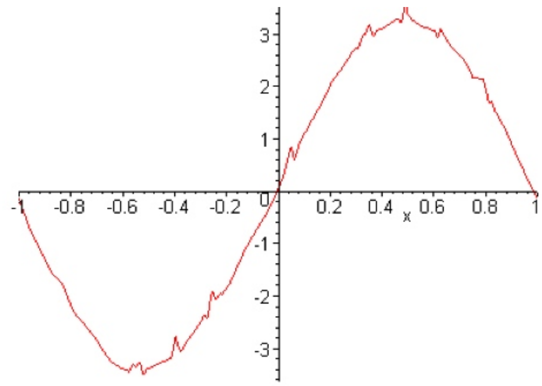

Fig.3 Fonction modélisant le signal sonore (Maple6)