

---

## Lu pour vous

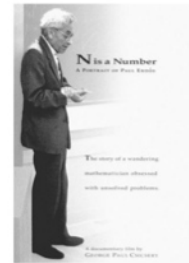
---

CHRONIQUEUR : ROBERT BILINSKI,  
COLLÈGE MONTMORENCY  
COLLABORATION SPÉCIALE : BERNARD COURTEAU  
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sous la présente rubrique, vous trouverez une chronique passablement différente. En effet, elle ne contient que deux recensions. La première est celle d'un DVD sur Paul Erdős et la seconde est une recension proposée par Bernard Courteau. Son apport est formidable! Merci!

---

**George Paul Csicsery, *N is a Number : Portrait of Paul Erdős*,  
Zala Films, 2007, 57 min., ISBN 0972458816, environ 20 \$.**



Si on demandait de nommer une figure énigmatique des mathématiques du XX<sup>e</sup> siècle, la réponse tomberait souvent sur Paul Erdős. Il est là, dans le folklore mathématique, en train de parier sur des résultats mathématiques et en train de penser. J'ai souvent entendu son nom, j'ai souvent lu son nom. Mais je ne connaissais pas grand-chose sur lui. J'imagine que c'est un des rares mathématiciens, sinon le seul, dont on a écrit une biographie de son vivant. Donc quand je suis tombé sur ce documentaire, la curiosité m'a pris...

Bien que la date de parution de ce DVD soit 2007, il faut comprendre que c'est la date d'émission du DVD et non la date de création du documentaire, qui semble daté de 1993, alors qu'il était présenté au Festival international du nouveau cinéma et des nouveaux médias de Montréal. Le tournage a eu lieu dans les années précédentes dans 4 pays (Angleterre, Hongrie, Pologne, États-Unis). Le film contient plusieurs extraits historiques pour mettre en contexte la vie de Erdős (première et seconde guerres mondiales, guerre froide...) et 2 animations pour illustrer 2 concepts de mathématiques : un résultat de Tchebychev dont il a simplifié la preuve (théorème : il existe toujours un nombre premier entre  $n$  et  $2n$ ) et le théorème de Ramsey en théorie des graphes.

En parlant à mes amis de ce documentaire, certains aspects un peu plus nébuleux de la vie de Erdős sont sortis qui n'apparaissent pas dans le documentaire. Par contre, on voit clairement le côté bohème de ce grand mathématicien qui ne possédait pas d'adresse fixe et qui, à la manière d'une

abeille dans un champ de fleurs, se promenait d'un mathématicien à un autre pour goûter à des problèmes non résolus et les résoudre. En échange, Erdős apparaissait comme auteur sur l'article issu de ce butinage, et ses articles se chiffraient au nombre de 1300. Ce n'est pas un apport négligeable, surtout si l'on considère que Erdős n'a pas enseigné pendant les 50 années précédant la sortie du documentaire. En contrepartie, cette errance de Erdős permettrait de disséminer assez vite des résultats qu'il considérait importants puisque les gens qui l'accueillaient formaient souvent des « salons » pour que les mathématiciens locaux puissent lui poser des questions.

Visuellement, ce documentaire est très « humain » : entrevues avec Erdős, ses amis, ses collègues et des conférences de Erdős. De plus, comme on dit, c'est un documentaire « à petit budget » : la caméra ne bouge pas, il n'y a pas d'effets spéciaux et la postproduction est minimale. Mais on ne s'attend pas à voir un film d'action lorsqu'on se met dans l'esprit de voir ce film. Le livret qui accompagne le DVD est en quelque sorte sa nécrologie : extraits des plus grands journaux de la planète à son décès en septembre 1996. En supplément sur le DVD, on retrouve sept extraits inédits d'entrevues.

En faisant un retour sur le film après son visionnement, je me demande, comme me le dit si bien mon amie Julie : quel est le propos de ce film ? Le réalisateur du film prend un certain temps pour expliquer la nature excentrique de Erdős (discussions sur la mère, les motifs, le pourquoi du comportement...) : serait-ce là la réponse... ?

Globalement, ce documentaire m'a plus. Il intéressera professeurs, historiens, amateurs de mathématiques et curieux de tout genre. Au prix où on peut le trouver, je ne pense pas qu'on puisse dire que son achat est prohibitif. Étant donné que le personnage est assez curieux et que l'accent du documentaire est mis sur le côté humain (nomadisme, paris, excentricité...), je crois qu'il a un intérêt pour les non-mathématiciens qui aiment les biographies. Bon visionnement !

PS : Si vous connaissez d'autres documentaires de mathématiques disponibles sur DVD, pourriez-vous m'en faire part ?

---

Voici pour conclure une recension non sollicitée et, ma foi, bienvenue ! Je remercie chaleureusement encore une fois Bernard Courteau de me fournir un texte portant sur une de ses lectures personnelles. Voici le courriel avec lequel Bernard me l'a transmis :

« Robert,

Voici la recension du livre de Ekeland, *Le meilleur des mondes possibles. Mathématiques et destinée*, pour le numéro de mai du Bulletin. C'est un peu long comme recension, mais j'ai trouvé ce livre vraiment formidable.

Amitiés.  
Bernard »

J'espère que Bernard ne m'en voudra pas de l'avoir mis en décembre.

Ivar Ekeland, *Le meilleur des mondes possibles.*

*Mathématiques et destinée,*

Éditions du Seuil, 2000, 300 p., ISBN 2020283263, environ 30 \$.



Cet excellent livre, très riche, se situe au centre même de la pensée humaine, là où l'homme rêve le monde et essaie d'en dégager la réalité. Comment se démarque cette réalité parmi tous les possibles que l'on peut rêver ? Telle est la question. Et cette question ne peut se poser que si on a le moyen de comparer les possibles entre eux. Ce moyen est le langage, et pour Galilée et l'auteur, ce langage est mathématique, comme nous le laisse entendre le sous-titre du livre.

Le rêve de tout philosophe, de tout scientifique, de tout artiste même – en tout cas de tout théoricien – n'est-il pas de rassembler, d'unifier sous quelques principes universels, les moins nombreux possible, tout le corpus des observations ou des sensations que l'on a sous la main ou même celles que l'on n'a pas encore ! Le livre de Ekeland a ce rêve comme leitmotiv et il retrace l'histoire trop peu connue de l'un de ces principes universels : le principe de moindre action, qui commence avec Fermat en optique en 1662, continue plus généralement avec Maupertuis et Euler en 1745 et arrive jusqu'à nous avec Feynman en 1948, après bien des hauts et des bas, des disputes, des querelles, des débats.

Le livre s'ouvre sur une mise en contexte actuelle, et exotique pour un français, où l'on entend la Sagouine d'Antonine Maillet philosopher dans sa belle langue acadienne sur les malheurs du monde. Le discours de la Sagouine s'insère dans une tradition philosophique très ancienne selon laquelle, malgré tout ces malheurs, le monde où nous vivons est le meilleur possible. Dieu a fait au mieux, compte tenu des contraintes qui pesaient sur lui.

Dans son introduction, l'auteur pose le problème et annonce ses intentions :

*« Il s'agit de découvrir les contraintes qui pèsent sur l'existence, de montrer leur cohérence logique en les déduisant toutes d'un petit nombre d'entre elles, qui seront érigées en lois fondamentales de l'univers, et de constater que l'ensemble des mondes qui s'y conforment est suffisamment réduit pour que le monde réel apparaisse en définitive comme préférable à tous ceux qui auraient pu être... »*

Le livre se propose de raconter une histoire qui tourne autour d'un principe métaphysique : « la nature procède par les moyens les plus simples et les plus efficaces en dépensant le moins possible ». « Le fil (de cette histoire) part de la physique, fait un détour par la philosophie, puis revient vers les mathématiques. Il passe ensuite à la biologie et se termine en économie. »

Dans le premier chapitre, la mesure du temps, l'auteur rend hommage à Galilée qui a observé l'isochronie du pendule : « La voilà la révolution galiléenne : ce n'est pas d'affirmer que la Terre tourne et de placer le Soleil au centre du monde physique, c'est d'affirmer qu'il existe un mouvement permanent et périodique, sans commencement ni fin, sans moteur ni cause, et de l'insérer dans l'espace géométrique, comme le grand candélabre bat lentement sous la voûte de la cathédrale de Pise. « *Eppur', si muove!* » : ce n'est pas de la Terre qu'il faut le dire, c'est de cet être mathématique paradoxal qui bouge sans changer » (p. 20).

Galilée se trompait, son pendule n'est pas exactement isochrone et l'auteur raconte de façon très

intéressante l'histoire de l'heure exacte qui va du pendule de Huygens basé sur la cycloïde jusqu'au chronomètre de Harrison. Il remarque : « Mais c'est bien Huygens qui a fondé la chronométrie moderne ; exemple remarquable d'une découverte technologique capitale qui procède non pas des gens de métier ou des utilisateurs, mais des hommes de sciences et des théoriciens » (p. 33).

Dans le chapitre sur la connaissance scientifique, l'auteur raconte l'émerveillement de Galilée devant les possibilités immenses offertes par la modélisation mathématique et pose le problème de la simplicité en sciences rappelant la réponse d'Occam : « Il ne faut pas multiplier les concepts plus qu'il n'est nécessaire ». C'est le fameux principe du rasoir d'Occam que Newton intègre dans ses règles de la philosophie naturelle. Ce principe de parcimonie conduit à voir le monde comme une machine construite par un dieu rationnel, dont les mouvements peuvent être calculés à partir de quelques lois simples. Mais de même qu'un artisan peut construire plusieurs machines, il peut y avoir plusieurs mondes possibles et la question se pose : pourquoi cet univers-là et pas un autre ? L'auteur prend la peine d'explicitier la réponse de Leibniz : ce monde est le meilleur de tous ceux qui sont possibles et le possible est pour Leibniz ce qui est identique à soi-même et ne recèle aucune contradiction.

On entre dans le cœur du sujet au chapitre sur le principe de moindre action où on voit d'abord Fermat utiliser une idée philosophique : « La nature agit toujours par les voies les plus courtes » qu'il précise en optique en « La lumière suit le chemin qui prend le moins de temps ». Il en déduit la loi de la réfraction de Snell-Descartes. Sa démonstration utilise une hypothèse contraire à celle de Descartes à savoir, que la vitesse de la lumière est plus grande dans un milieu moins dense, ce qui lui a valu une dispute avec les cartésiens qui lui reprochaient d'utiliser un principe moral et non point physique. Fermat répond que la lumière ne cherche peut-être pas à minimiser le temps de parcours mais que, pourtant, elle se comporte *comme* si elle le faisait. L'auteur remarque qu'un « c'est comme si » vaut bien un « c'est comme ça ».

Vient ensuite Maupertuis qui énonce le principe de moindre action : la quantité d'action nécessaire pour causer quelque changement dans la Nature est la plus petite qu'il est possible (pour un corps de masse  $m$  parcourant une distance  $l$  à une vitesse constante  $v$ , la quantité d'action est  $mv l$ ). Maupertuis en déduit la loi de la réfraction, les lois du mouvement lors du choc de deux corps et les lois d'équilibre du levier. Il s'emballe :

« Après tant de grands hommes qui ont travaillé sur cette matière, je n'ose presque dire que j'ai découvert un principe sur lequel sont fondées toutes les lois du mouvement . . . » et fait intervenir le Créateur qui agit de manière à économiser cette quantité mystérieuse, la quantité d'action, qu'il a découverte.

La prétention de Maupertuis lui attire les sarcasmes de Voltaire rassemblés dans le pamphlet *Histoire du docteur Akakia et du natif de Saint-Malo*. Maupertuis, président de l'Académie de Berlin, devient la risée de toute l'Europe. Il en meurt en 1759. Il reste que l'idée de Maupertuis reçoit une formulation générale du grand Euler dans un ouvrage où il jette les bases du calcul des variations. Pour un corps de masse  $m$  se déplaçant le long d'une courbe  $C$  avec une vitesse variable  $v$ , Euler définit l'action comme l'intégrale de ligne  $A(C)$  le long de  $C$  de  $mv(s)$  où  $s$  est la longueur d'arc sur  $C$ . Lagrange développe les outils d'Euler et aboutit aux équations d'Euler-Lagrange. Le principe de moindre action peut alors devenir une « méthode directe et générale pour résoudre, ou du moins pour mettre en équation tous les problèmes de dynamique que l'on peut imaginer » (Mécanique (sic) analytique (re-sic), 1788, p. 179).

Malheureusement, il arrive que dans certains problèmes l'action n'est pas minimale mais maximale et même ni minimale ni maximale comme l'observe Jacobi qui, dans ses leçons de dynamique, critique fortement le principe de moindre action. C'est Hamilton qui réhabilite le principe en le reformulant dans l'espace de phase (représentant la position et la vitesse du mobile) comme suit : parmi toutes les trajectoires possibles  $C$  joignant, dans l'espace de phase, un point  $A$  à un point  $B$ , la trajectoire réelle sera celle qui rendra stationnaire (et non pas minimale) l'intégrale sur  $C$  de la fonction  $T-V$  où  $T$  est l'énergie cinétique et  $V$  l'énergie potentielle vues comme fonctions du temps. Cela signifie que la variation de l'action est nulle pour la trajectoire réelle ou, intuitivement, que l'action est presque constante pour des trajectoires très proches de la trajectoire réelle.

Mais c'est le caractère finaliste du principe de moindre action (ou plus précisément de l'action stationnaire) qui pose problème. Après que la Mécanique se soit débarrassée des idées animistes pour expliquer le mouvement, il est gênant de revenir à l'idée que la Nature puisse agir selon une intention. Cela fait que pendant tout le XIX<sup>e</sup> siècle les savants se sont méfiés du principe de moindre action et ont tout fait pour l'éviter. Par contre « agir selon un but » est une caractéristique proprement humaine et c'est peut-être là qu'un principe d'économie peut être le plus utile. Pour Mach, la Science n'est qu'un moyen d'économiser l'expérience et la réflexion. Poincaré dira que le rôle de la Science est de produire l'économie de pensée comme la machine produit l'économie d'effort. Le problème de la vérité en science se pose. Mach et Poincaré mettent l'accent sur l'aspect sociologique de la « recherche de la vérité » en science : la communauté des savants essaye de mettre en commun ses observations de la manière la plus économique possible, sans trop savoir si l'accord auquel elle arrive correspond à une réalité extérieure. Poincaré dira « ces deux propositions “la Terre tourne” et “il est plus commode se supposer que la Terre tourne” ont un seul et même sens », et dans son livre *La valeur de la Science* « la seule réalité objective, ce sont les rapports des choses, d'où résulte cette harmonie universelle. Sans doute ces rapports, cette harmonie ne sauraient être conçus en dehors d'un esprit qui les conçoit ou les sent. Mais ils sont néanmoins objectifs parce qu'ils sont, deviendront, ou resteront communs à tous les êtres pensants ».

Dans les trois chapitres centraux du livre – La mécanique classique, La géométrie du mouvement, La réalité – l'auteur n'hésite pas à présenter des idées mathématiques profondes en les illustrant de façon très convaincante par de nombreux diagrammes. L'auteur utilise tout au long du développement un exemple prototype de système mécanique très éclairant, un billard à bande elliptique ou plus généralement convexe, à fond plat ou bosselé, pour représenter les diverses situations qui se présentent en mécanique classique. Pour les fondateurs de la Mécanique, tout système mécanique est exprimé par une équation différentielle dont les solutions sont les trajectoires possibles du système, et ce qu'ils reprochent au fond au principe de moindre action, c'est d'être inutile, de n'apporter rien de nouveau. L'auteur montre qu'il en est bien ainsi, mais seulement dans le cas où l'équation différentielle est complètement intégrable, c'est-à-dire où il existe une méthode générale (analytique) de calculer l'ensemble de toutes les solutions. Comme l'immense majorité des équations différentielles ne sont pas complètement intégrables, ce que les fondateurs de la Mécanique ne soupçonnaient pas, cela laisse un champ d'action tout aussi immense où essayer de tirer du principe de moindre action (ou plus justement d'action stationnaire) quelque chose de nouveau.

C'est Poincaré qui a attiré l'attention sur les systèmes non complètement intégrables et développé des méthodes géométriques (dites qualitatives) par opposition aux méthodes analytiques inapplicables dans ces cas. Il découvre alors le phénomène du chaos : de petites causes peuvent produire de grands effets ! Et Poincaré utilise le principe de moindre action pour trouver des solutions périodiques qui

sont pour lui « la seule brèche par laquelle nous puissions pénétrer dans cette forteresse réputée inaccessible ». L'auteur illustre à merveille son propos avec sa table de billard qui, selon les hypothèses retenues, donnent des systèmes dynamiques de plus en plus complexes, les seuls billards complètement intégrables étant les billards à bandes elliptiques parfaitement élastiques, à fonds plats sans friction. Ces systèmes requièrent de passer de l'espace de configuration à l'espace de phase muni de sa géométrie symplectique ou même à des espaces de dimensions infinies. L'auteur cite des résultats récents des années 1980-1990, auxquels il a lui-même participé, où le principe de moindre action joue un rôle essentiel. Le fait qu'il ait été impliqué personnellement dans ces recherches lui a-t-il donné l'idée de remonter aux sources historiques et écrire ce très beau livre ? Je crois que oui.

Dans le chapitre sur la réalité, l'auteur nous parle des phénomènes irréversibles et de l'importance de l'échelle microscopique ou macroscopique où on se place. La physique macroscopique est liée à la physique microscopique mais ne lui ressemble pas. L'auteur nous présente l'explication microscopique du principe de moindre action donnée par Feynman en 1948 : « le principe de moindre action est la traduction macroscopique d'un processus d'agrégation des phénomènes quantiques, processus au demeurant aveugle et qui ne se prête à aucune interprétation finaliste » (p. 288). Pour donner la règle d'agrégation de Feynman, on commence par associer à toute courbe  $C$  de l'espace de phase un angle  $A(C)/h$  modulo  $2\pi$ , où  $A(C)$  est l'action et  $h$  la constante de Planck. Comme  $h$  est très petit, cet angle, appelé phase de  $C$ , peut varier très vite avec  $C$ . On peut représenter cette phase par la position d'une aiguille sur un cadran attaché à  $C$ . Comme les objets quantiques se comportent comme des ondes se propageant dans toutes les directions, ils se retrouvent à l'échelle microscopique sur toutes les courbes reliant un point  $A$  à un point  $B$ . À l'échelle macroscopique, on perçoit une espèce de trajectoire moyenne reliant  $A$  à  $B$  obtenue en agrégeant les courbes  $C$  par paquets. Les seuls paquets qui émergent sont ceux pour lesquels les phases de leurs courbes constitutives sont sensiblement égales et se renforcent mutuellement. Dans les autres paquets, les phases se détruisent mutuellement et rien n'apparaît au niveau macroscopique. On comprend alors que le point important est que l'action  $A(C)$  soit stationnaire et non pas nécessairement minimale.

Deux siècles de progrès en physique et en mathématiques ont permis cette explication brillante de Feynman d'un principe qui, à l'origine, a été entouré d'un voile métaphysique mais qui, maintenant, a intégré le courant séculier de la science, à moins de considérer la mécanique quantique comme une nouvelle religion ! Cette discussion est à mon avis le point culminant du livre. L'auteur termine son chapitre sur la réalité par des réflexions sur la possibilité ou l'impossibilité d'une explication ultime qui permettrait d'embrasser la réalité d'un seul coup et il en vient à une profession de foi : quand il s'agit d'expliquer le monde, la science, au contraire des mythologies et des religions, construit, pour chaque ensemble de phénomènes dont on veut rendre compte, une théorie, c'est-à-dire un modèle mathématique dont la cohérence interne, purement logique, est supposée reproduire la cohérence observée, purement contingente, des phénomènes étudiés, puis à confronter la théorie avec l'expérience (p. 229). Il dit : « Cette démarche a été à l'origine de ce qui est, après l'invention de l'agriculture, le plus grand succès de l'humanité, mettant à sa disposition des sources inépuisables d'énergie et faisant reculer de plusieurs décennies l'échéance individuelle de la mort ». Et plus loin : « Nous le reconnaissons (l'homme) par une pratique, la pratique de la science, qui n'est peut-être que la forme la plus évoluée de la pratique du langage » (p. 232).

Le livre s'achève par deux chapitres si on peut dire plus terre-à-terre – Le monde biologique et La nature et l'artifice – où l'auteur reprend son thème : le monde, tel qu'il est, est-il le meilleur des mondes possibles ? Dans le cas du monde vivant, il est clair pour l'auteur que le mécanisme essentiel

est la sélection darwinienne, la lutte pour la vie dont le résultat est la survie des mieux adaptés. Mais la sélection darwinienne est aveugle, soumise au hasard des mutations et à la nécessité de transmettre à la descendance les modifications qui marchent. Elle ne conduit pas nécessairement à un monde meilleur mais à un monde adapté aux conditions écologiques qui prévalent et qui pourraient changer brusquement. Par contre « Les mondes possibles se pressent dorénavant à notre porte » : une planète plus chaude modifiée profondément par l'effet de serre, ou à l'inverse une planète plus froide à cause des poussières d'une guerre atomique qui nous cacheraient le soleil pendant des années, ou encore une planète dénudée par l'homme, sans arbres, sans poissons. Mais ces « mondes possibles ne sont pas dans la main de Dieu, ils sont dans la nôtre. Leur avènement n'est pas pour la fin des temps, il a lieu aujourd'hui ».

L'auteur termine son livre sur une note optimiste en présentant l'idée d'optimisation et la possibilité de son utilisation dans les systèmes sociaux ou politiques : « l'univers humain ne dépend pas du hasard et de la nécessité, comme l'univers physique, mais du hasard et de la volonté ». C'est le domaine de la morale au sens le plus élevé du terme. Et c'est une conclusion morale que l'auteur nous laisse.

« Maintenant que s'achève l'aventure intellectuelle commencée à la Renaissance et que se réalisent enfin les ambitions de Galilée, une voie encore inexplorée s'ouvre devant nous : construire petit à petit, morceau par morceau, un monde meilleur, en montant des difficultés les plus simples vers les plus compliquées, des problèmes d'environnement aux problèmes de société, sans attendre que les choses s'arrangent d'elles-mêmes et sans croire que telle ou telle idéologie fournisse des réponses toutes faites.

Telle sera peut-être l'aventure intellectuelle du troisième millénaire. Les enjeux sont devenus planétaires : à tout instant, le monde oscille entre différents états possibles, et ce sont nos décisions qui font pencher la balance, souvent de manière irréversible. À nous de faire en sorte que ces décisions soient conscientes, alimentées par une véritable réflexion, et que le monde qui en résulte soit meilleur que celui que nous connaissons ».

Voilà un livre très stimulant.

Bernard Courteau  
courteaub@videotron.ca

**À venir :**

En français : Algorithmes de graphes, Le tournoi mathématique du Limousin, Didactique des mathématiques et formation des enseignants

En anglais : Partial Differential Equations for probabilists, Cellular Automata, Social Choice and the Mathematics of Manipulation, Inside your Calculator, . . .

Robert Bilinski  
Collège Montmorency  
rbilinski@gmail.com

Vous venez de lire un ouvrage qui vous a passionné? ou qui vous a choqué? Nous attendons vos commentaires : un bref texte que vous postez à Robert Bilinski, Dép. de maths, 475, boul. de L'avenir, Laval (Québec), H7N 5H9. Vous pouvez aussi utiliser le courrier électronique (rbilinski@cmontmorency.qc.ca).