Enjeux et défis d'une culture mathématique sans frontières

France Caron,
Université de Montréal

NOTE DE L'ÉDITEUR : Ce texte est une version légèrement modifiée d'un texte paru dans les Actes du 49e congrès de l'AMQ, Mathématiques et diversité culturelle, tenu en juin 2006 à Sherbrooke, alors qu'on était au début de la mise en œuvre du « renouveau pédagogique » au secondaire. Il serait aujourd'hui possible d'étendre l'analyse de l'intégration de la dimension culturelle dans les mathématiques du secondaire aux programmes et manuels qui ont été publiés depuis, ainsi qu'aux épreuves d'évaluation. Cela est « laissé en exercice au lecteur »...

RÉSUMÉ

L'intégration d'une dimension culturelle à l'enseignement des mathématiques paraît faire consensus. Mais la variété des approches envisagées pour une telle intégration reflète la diversité des conceptions qu'on a de la culture et des mathématiques, et des frontières qu'on leur attribue. Ce texte tente de faire le point sur ces questions et propose quelques pistes et balises pour que l'universalité des mathématiques puisse émerger de la légitime prise en compte de la diversité de leurs manifestations.

Depuis quelques années déjà, les médias se plaisent à souligner l'orientation par compétences du *Programme de formation de l'école québécoise* en l'associant régulièrement à un recul de la place accordée aux connaissances. Ce point de vue, bien souvent exprimé de façon alarmiste, néglige un aspect important de ces programmes qui leur vient de l'intention clairement exprimée de rehausser la dimension culturelle de l'éducation dispensée aux élèves du Québec. En témoignent les nombreux « repères culturels » intégrés aux programmes d'enseignement des différentes disciplines (Gouvernement du Québec ; 2001, 2003a), ainsi qu'un document d'accompagnement produit à l'intention des enseignants et portant spécifiquement sur l'intégration de la dimension culturelle à l'école (Gouvernement du Québec, 2003b). Comme l'affirme ce document d'accompagnement, « le rehaussement culturel du cursus scolaire est un des buts visés par l'énoncé de politique éducative de 1997 et tire son origine du rapport *Réaffirmer l'école*, paru la même année ». Dans ce rapport du Groupe de travail sur la réforme du curriculum (Gouvernement du Québec, 1997), les auteurs avançaient que relever le contenu culturel dans le curriculum ne se réduisait pas à accroître la place faite à la littérature, aux arts et à l'histoire ; c'était plutôt la perspective générale du curriculum d'études qu'il convenait d'infléchir pour lui permettre d'accorder à la finalité culturelle au moins autant d'importance que les finalités utilitaire et cognitive qui avaient dirigé l'élaboration des programmes alors en place.

Comme il est plutôt malvenu de s'opposer à la vertu, le rehaussement culturel est un aspect de la réforme rarement remis en cause, si ce n'est pour souligner la nécessité d'outiller les enseignants en ce sens. Ainsi, l'intégration d'une dimension culturelle à l'enseignement, y compris en mathématiques, paraît vouloir faire consensus. Mais la variété des approches envisagées pour ce faire témoigne bien de la diversité des conceptions de la culture et des mathématiques, et des frontières qu'on leur attribue. Si l'universalité est l'un des attributs les plus précieux des mathématiques, à quelle(s) culture(s) devrait-on s'intéresser en classe de mathématiques ? Les nouveaux programmes de mathématiques vont-ils dans le sens de cette culture idéale ? C'est en partant de ces vastes questions que nous avions amorcé une réflexion dans le cadre d'un atelier au 49e congrès de l'AMQ (2006), alors que se déployait la réforme[1] du curriculum au premier cycle du secondaire ; nous en reprenons l'essentiel dans cet article.

UN CONCEPT POLYSÉMIQUE

Il existe de nombreuses façons de concevoir et de définir la culture. Notons d'abord une vision essentiellement académique, élitiste et quasi absolue de la culture (dite alors générale), aux visées universelles, mais liée dans la pratique à une nation :

> Culture générale : ensemble de connaissances générales sur la littérature, l'histoire, la philosophie, les sciences et les arts, que doivent posséder, au sortir de l'adolescence, tous ceux qui forment l'élite de la nation. (Dictionnaire de l'Académie française, 1932)

À l'autre extrême, abordé sous un angle anthropologique et sociologique, le concept de culture devient quelque chose de relativiste, dans la mesure où il peut s'appliquer à tout groupe social, sans visée normative ou prescriptive :

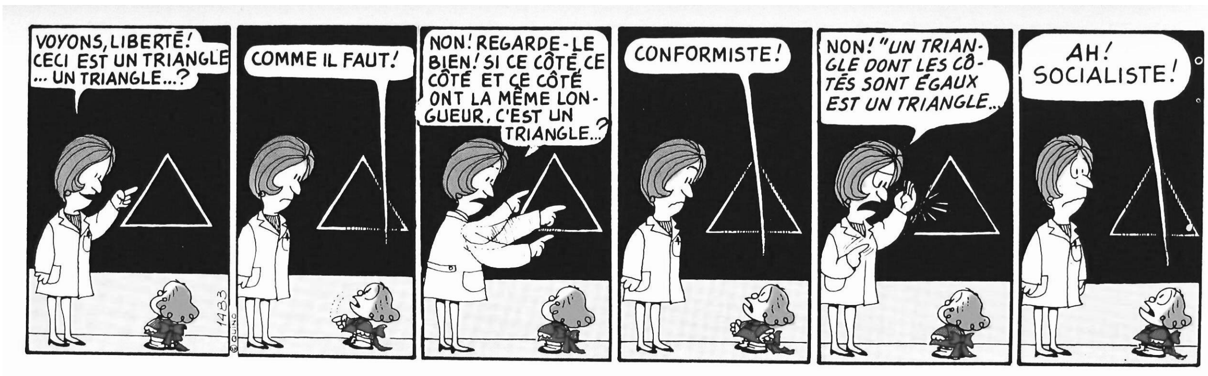
> Ensemble des données acquises et transmises à l'intérieur d'un groupe social. Les productions intellectuelles, artistiques, religieuses, etc., de ce groupe. (http ://dictionnaire.tv5.org/)

Quelque part entre ces deux positions, on retrouve une conception de la culture qui paraît mieux correspondre à une vision démocratique de l'éducation :

> Ensemble des connaissances acquises qui permettent de développer le sens critique, le goût, le jugement. (Le Robert, 2004)

Mais, comme tend à le suggérer la charmante bande dessinée ci-dessous[2], sans doute convient-il de préciser l'ensemble des connaissances utilisables dans la pratique mathématique, et propices à y développer le sens critique, le goût et le jugement.

[1]Maintenant appelée « renouveau pédagogique ».
[2]Quino (1985) Les vacances de Mafalda, © Éditions Glénat.



Préciser cet ensemble revient à définir ce qu'on entend par culture mathématique. L'Organisation de coopération et de développement économiques (OCDE), à travers son Programme international pour le suivi des acquis des élèves (PISA) s'est attelée à une telle tâche :

> La culture mathématique (Mathematical literacy) est l'aptitude d'un individu à identifier et à comprendre les divers rôles joués par les mathématiques dans le Monde, à porter des jugements fondés à leur propos et à s'engager dans des activités mathématiques, en fonction des exigences de sa vie présente et future en tant que citoyen constructif, impliqué et réfléchi. (OCDE, 2001)

Prise seule, sans les contenus, processus et contextes qui en précisent le sens, cette définition peut sembler à la fois ambitieuse et insuffisante. En effet, il apparaît difficile de « porter des jugements fondés à propos des mathématiques » si l'on ne réfère pas dans cette culture mathématique à l'épistémologie propre à cette discipline, à la façon dont s'est construit et continue de se construire ce corpus de connaissances.

Pour tenter de mieux définir cette culture mathématique à laquelle tout citoyen aurait droit, revenons au concept de culture. Selon Fernand Dumont, figure de proue de la sociologie au Québec, la culture d'un individu est constituée de deux volets. Il définit ainsi d'abord la « culture première » comme le donné, la culture au sens sociologique et anthropologique du terme, celle qui nous vient de notre milieu immédiat, familial, ethnique et social : notre langue première, notre identification religieuse initiale, etc. C'est cette culture qui crée l'unité première entre le monde et soi, qui permet à l'individu d'*appartenir* au monde. À cette culture première vient se greffer une « culture seconde » qui résulte des expériences personnelles accumulées (fréquentation d'institutions d'enseignement, intégration de milieux de travail, lectures, loisirs, etc.) et plus particulièrement de l'ensemble des procédés de rupture avec la culture première, qui permettent à l'individu de voir le monde et de se voir en même temps, de *se situer* dans le monde.

On retrouve cette double nature de la culture dans la présentation générale du programme du premier cycle du secondaire, applicable à toutes les disciplines. La culture y est en effet présentée comme « instrument d'appréhension de soi et du monde », et l'école aurait pour responsabilité de développer chez l'élève autant sa culture première « en partant d'éléments du milieu immédiat, à la source de l'identité personnelle et sociale », qu'une culture élargie qui « puise dans les fruits de l'activité humaine d'hier comme d'aujourd'hui dans les connaissances de l'héritage collectif et dans les repères communs élaborés au fil du temps » (Gouvernement du Québec, 2003a, p. 7). On y précise par ailleurs qu'enseigner dans une perspective culturelle consiste, notamment, à « exploiter des repères culturels pour amener l'élève à comprendre le monde et lui faire découvrir chaque discipline comme porteuse de sens, tant par son histoire que par les questionnements particuliers qu'elle suscite », à « amener l'élève à établir un plus grand nombre de liens entre les divers phénomènes scientifiques, sociaux, artistiques, moraux et économiques et à se situer par rapport à eux » et, ainsi, à « poser un regard critique, éthique et esthétique sur le monde ». Cette visée finale, qui lie compétences et connaissances, nous renvoie à la définition de la culture du Robert. Et pour s'en approcher, tout en reconnaissant que la culture est aussi « une réalité vivante à laquelle chaque génération apporte sa contribution », le programme précise que « l'école prendra appui sur la culture propre aux jeunes pour les amener à s'ouvrir à d'autres dimensions des multiples manifestations de l'activité humaine et à actualiser leur créativité dans tous les domaines ». Cela nous ramène à la complémentarité des deux cultures, telles que définies par Dumont, qui participent au développement d'un individu.

En intégrant de façon explicite la dimension historique à l'enseignement des mathématiques, les nouveaux programmes québécois donnent une des clés pour espérer porter des « jugements fondés à propos des mathématiques », comme le voudrait la culture mathématique telle que définie par l'OCDE. Ce choix curriculaire rejoint la position de Charnay (2002), selon qui, pour prétendre à la dimension culturelle, l'enseignement des mathématiques se doit d'envisager, dès le primaire, l'ensemble des enjeux suivants :

- Commencer, lorsque c'est possible, à situer les connaissances mathématiques dans une perspective historique pour les faire percevoir comme construction humaine.
- Fournir aux élèves les outils intellectuels utiles au citoyen pour appréhender, de façon critique, les informations et les propositions qui lui sont soumises.
- Éveiller au caractère scientifique des mathématiques et à leur large applicabilité.
- Initier très tôt les élèves à la façon spécifique dont les mathématiques envisagent le rapport au vrai et au faux, soit en s'appuyant sur leur rapport au « réel » en ayant recours à la puissance du raisonnement.
- Initier à une pratique de l'activité mathématique, caractérisée à la fois par :
  - le goût du questionnement, de la recherche, de l'investigation ;
  - la nécessité de structurer, d'organiser, d'expliciter, de prouver.

Tout en étant ambitieuse, cette liste fait ressortir à la fois la spécificité disciplinaire des mathématiques et les liens multiples qu'elles entretiennent avec les autres disciplines et les différents domaines d'activité humaine. C'est en touchant à ces deux aspects qu'il nous paraît possible de faire apprécier les mathématiques comme discipline porteuse de sens, autant pour elle-même que pour ce qui lui est extérieur, et de contribuer ainsi au développement d'une culture propice à l'exercice du sens critique, du goût et du jugement à l'endroit des mathématiques et des réalités qu'elles permettent de modéliser. Nous référerons donc à ce cadre pour examiner jusqu'à quel point la mise en place des nouveaux programmes s'inscrit dans le développement d'une telle culture mathématique et constitue un changement par rapport à ce qui a pu se faire avant. Pour aller au-delà des intentions énoncées dans les documents officiels et nous rapprocher de leur réalisation en classe, nous avons aussi parcouru le contenu des nouveaux manuels de première secondaire[3], publiés par trois éditeurs différents et approuvés par le MÉLS. Une telle exploration suggère quelques pistes et balises à envisager pour le développement à l'école d'une culture mathématique.

LA PERSPECTIVE HISTORIQUE

Malgré une liste relativement courte de repères historiques dans les programmes de mathématiques du premier cycle, la perspective historique est bien présente dans les nouveaux manuels. Cette direction avait déjà été amorcée dans les manuels des programmes antérieurs, mais on sent ici une volonté de faire ressortir davantage le processus de construction du savoir mathématique, en allant plus souvent au-delà des dates, des personnages et des anecdotes. Cela se manifeste notamment par :

- l'exposé de constructions variées du savoir mathématique telles qu'elles ont émergé dans différentes civilisations ; les systèmes de numération en représentent l'exemple le plus classique, abondamment utilisé dans les nouveaux manuels du primaire et repris dans ceux de première secondaire, en incluant parfois les algorithmes utilisés dans ces systèmes pour réaliser les opérations arithmétiques (ex. le procédé de multiplication dans l'Égypte ancienne que fait découvrir *À vos maths !*[4]) ;
- l'exposé des débats et changements de points de vue qui ont marqué certaines évolutions : la présentation dans *Panoramath*[5] du long processus ayant mené à la reconnaissance des nombres négatifs en est un bel exemple ;
- des activités d'apprentissage qui amènent l'élève à résoudre un problème similaire à celui qu'ont résolu des mathématiciens à une autre époque : par exemple, le calcul de la circonférence de la terre et celui de la distance terre-lune, réalisés dès l'Antiquité, sont joliment présentés dans *Perspective*[6] ;
- des idées de sujets de recherche pour aller plus loin.

Il est intéressant de noter que dans ces manuels où l'on aborde l'étude de la géométrie de façon un peu plus systématique, le traitement réservé à Euclide est vite expédié. Entre l'œuvre mathématique d'Euclide et l'œuvre artistique d'Escher, on semble préférer la seconde pour mettre en place des activités d'apprentissage en géométrie. Il est vrai que depuis les années 70, sans avoir été officiellement mise de côté comme ce fut le cas en France, la géométrie euclidienne n'occupe plus au Québec la position dominante qu'elle occupait avant dans l'enseignement de la géométrie au secondaire, ayant fait place, notamment, à la géométrie des transformations. Et pour cette géométrie des transformations, l'œuvre d'Escher peut effectivement constituer à la fois une banque d'illustrations aux qualités esthétiques indéniables et, par son côté fascinant et intrigant, une source de questionnements intéressants.

---

[3] Cadieux, R., Gendron, I. et Ledoux, A. (2005) *Panoram@th*, Les Éditions CEC.
Coupal, M.. (2005) *À vos maths !* , Graficor · Chenelière Éducation.
Guay, S. , Hamel, J.-C. et Lemay, S. (2005) *Perspective mathématique*, Éditions Grand Duc – HRW.

[4] *À vos maths !* Manuel A, p. 160-161.

[5] *Panoram@th*, Manuel A, Volume 1, p. 114-115.

[6] *Perspective mathématique*, Manuel A, Volume 2, p. 352-357.

Il reste néanmoins, comme le rappelle Perspective[7], que les *Éléments* d'Euclide ont constitué pendant plus de deux mille ans le noyau de l'enseignement de la géométrie. On ne peut nier que cette œuvre majeure ait fortement contribué à définir « la façon spécifique dont les mathématiques envisagent le rapport au vrai et au faux » et contrôlent ce rapport par « la puissance du raisonnement ». Préciser que le mérite d'Euclide n'aura été que de rassembler des savoirs déjà connus pour la plupart et de les présenter de façon claire et logique paraît réducteur et n'est certes pas suffisant pour que l'élève puisse en faire de même avec ses connaissances, comme l'invite à le faire le manuel. Une fréquentation un peu plus prolongée de cette géométrie qui, dans le sillage de Platon et de Thalès de Milet, a cherché à se dégager du monde des objets pour viser celui des formes pures et a contribué ainsi, par la mise en place d'une première théorie axiomatique, à poser les bases du raisonnement déductif, pourrait aider l'élève à percevoir certains des échafaudages qui ont servi et servent encore à encadrer cette vaste construction humaine que sont les mathématiques. Car, est-il nécessaire de le rappeler, il ne s'agit pas d'une construction quelconque, soumise à l'arbitraire et aux dictats d'individus, mais bien d'un projet collectif animé par une quête de l'essence et de la cohérence ; sans imposer une seule forme à la construction ni la mettre à l'abri d'erreurs, cette finalité de cohérence exige néanmoins de soumettre les idées en jeu à l'examen, au débat et à la validation. Ce n'est d'ailleurs pas une simple coïncidence si a émergé, dans cette même Antiquité grecque, une première expérience de démocratie. Nous reviendrons sur cette idée dans la section qui suit.

LE RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE

Le raisonnement mathématique tient à la fois de l'inductif, pour explorer et dégager une régularité à partir d'observations, et du déductif pour tirer, par le recours à la logique, une conclusion à partir d'hypothèses supposées vraies et de propriétés connues. Le raisonnement déductif permet entre autres de valider, à l'intérieur de certaines conditions, une conjecture inférée à partir d'expériences et d'observations. Par sa rigueur et son formalisme, la démonstration est la forme la plus achevée du raisonnement déductif. La géométrie a longtemps été perçue comme le cadre privilégié pour l'apprentissage de la démonstration.

Si dans certains pays comme la France, l'enseignement de la démonstration a continué de vivre à l'école à travers notamment la géométrie des transformations et des espaces vectoriels (au coût parfois élevé que demandait le non-recours à une géométrie euclidienne, souvent plus accessible), la remise en question de la géométrie euclidienne au secondaire a plutôt entraîné au Québec un arrêt de l'enseignement de la démonstration et une centration en géométrie sur les processus de construction des transformations et sur les calculs d'angles, d'aires, de longueurs et de volumes. Cette réalité a été plusieurs fois dénoncée par les professeurs de mathématiques des collèges et des universités :

> Les mathématiques jouent un rôle central dans la civilisation occidentale. Il faut transmettre quelque chose qui soit représentatif de ce qu'elles sont. (Au secondaire) ce devrait être la géométrie, d'abord et avant tout, et sans visée utilitaire. L'objectif serait que chacun comprenne ce qu'est une théorie, comment, à partir d'axiomes et de règles de déduction, on peut arriver, par le raisonnement déductif, à démontrer des choses qui ne sont pas évidentes. Il ne

[7] *Perspective mathématique*, Manuel A, Volume 1, p. 84.

> s'agit pas de faire des élèves des géomètres, ni même des mathématiciens, mais bien des citoyens qui puissent juger par eux-mêmes, qui auront fait l'expérience d'une démonstration et appris que le savoir humain ne repose pas entièrement sur l'observation empirique, qu'on peut comprendre la nature par le raisonnement, sans en faire l'expérience directe. Faire une démonstration plutôt que d'imposer une vérité est une exigence au cœur de la démocratie. (André Joyal, Le Devoir, novembre 1997)

Présenté sous cet angle, non seulement l'exercice de la démonstration permettrait-il à l'élève de s'initier à un aspect caractéristique de la pratique mathématique et du raisonnement qui la sous-tend, mais il contribuerait aussi à doter l'élève d'« outils intellectuels utiles au citoyen pour appréhender, de façon critique, les informations et les propositions qui lui sont soumises », et se construire une opinion rationnelle qu'il pourra défendre :

> Je pense ceci, je pense cela ; j'ai des opinions. Si je ne peux argumenter, prouver, déduire, faire des hypothèses, les tester, si, face à toi, je ne peux défendre mon opinion, si je n'ai pas les mots pour la dire et les concepts pour la penser et le raisonnement pour l'étayer, ou bien je te casse la tête, ou bien, muet et impuissant, je te laisse encore l'emporter sur moi. Et je perds un peu plus de ma liberté. (Denis Guedj, 1997)

En apprenant à lier hypothèses et conclusions, l'élève développerait cette *pensée hypothétique*, indispensable au scientifique et utile à tout individu : une telle pensée offre l'option de se libérer momentanément de l'état actuel d'une réalité pour imaginer de nouveaux scénarios, envisager leurs implications, choisir de façon stratégique ceux vers lesquels il convient d'investir pour créer les conditions qui en permettront la réalisation, et reconnaître les situations impossibles vers lesquelles toute énergie déployée le serait à pure perte (Guedj, 1997). Une telle pensée pourrait aussi aider à reconnaître les zones floues et les incohérences dans tout système organisé : informatique, administratif, économique, juridique, politique, etc.

Si l'on admet ces hypothèses, on serait porté à croire que l'apport des nouveaux programmes au développement de la culture mathématique serait non négligeable, puisqu'à première vue on y lit un retour affirmé de la preuve et de la démonstration. En effet, la réalisation par l'élève de preuves ou de démonstrations constitue l'une des composantes de la Compétence 2 « Déployer un raisonnement mathématique » visée par le programme de mathématiques, et cela dès le premier cycle du secondaire (Gouvernement du Québec, 2003a). Mais un second regard amène à constater que cette même compétence s'évalue aussi par « l'utilisation correcte des concepts et des processus appropriés à la situation » et que les problèmes admissibles pour l'évaluation de cette compétence « nécessitent le recours à une combinaison connue de concepts et de processus appris antérieurement ». Dans ces conditions, on voit mal la motivation à amener l'élève à se questionner sur la validité d'une assertion, à chercher à enchaîner des implications logiques, si sa capacité à raisonner ne sera évaluée que sur la base de son application à reproduire une procédure déjà connue.

Il est sûr que l'apprentissage de la preuve est semé d'embûches ; en témoignent les nombreuses études didactiques sur la question (Dreyfus, 1999). Le raisonnement déductif ne s'inscrit pas dans la façon de penser spontanée des élèves, et il est régulièrement ignoré dans la vie de tous les jours, où l'on n'hésite pas à généraliser rapidement à partir d'un événement ou à sombrer dans un « relativisme absolu » qui affirme mollement que toutes les opinions se valent. Par ailleurs, force est de reconnaître que la complexité de bien des situations réelles se prête difficilement à un enchaînement rigoureux de déductions et s'inscrirait davantage dans un paradigme de logique floue (Sangalli, 2001). Mais peut-être que la preuve constitue malgré tout un des éléments de cette culture seconde qui permet de mieux voir le monde et qui donne tout son sens à l'école.

Cela n'implique pas pour autant de revenir en arrière en cherchant à reconstruire chez l'élève toute la géométrie euclidienne ou en réduisant dans l'enseignement le raisonnement mathématique à la preuve. L'exploration d'une situation, la recherche de régularités et la formulation de conjectures sont des éléments fondamentaux de la pratique mathématique, autant dans ses développements que dans ses applications, que les programmes actuels ont raison de reconnaître comme autre composante de la Compétence 2 (même si les modalités d'évaluation risquent à nouveau de faire obstacle à ces intentions). Mais la construction et la structuration de connaissances mathématiques, tant au niveau individuel que collectif, exige de ne pas s'arrêter là. L'épistémologie propre à toute discipline scientifique commande de questionner la généralité de ce qu'on infère, d'en cerner les conditions de validité et de chercher à en comprendre les causes. Et l'une des forces des mathématiques réside justement dans le fait que le caractère idéalisé des objets d'étude, où les structures sont mises à nu, permet de mieux contrôler les réponses à de tels questionnements et d'assurer la cohérence de la construction.

Par conséquent, il convient d'être vigilant lorsque le manuel paraît se satisfaire de l'observation de quelques cas pour conclure à une propriété, une « loi » ou une « règle » : c'est le cas notamment des propriétés des quadrilatères que *Perspective*[8] fait découvrir à l'élève à partir d'activités de traçage et d'observation. Sans remettre en cause la pertinence de telles activités, les résultats vers lesquels elles conduisent ne devraient pas se voir reconnaître un statut autre que celui de conjecture. Il conviendrait de se demander ensuite s'il s'agit d'une propriété commune à *tous* les quadrilatères de ce type et de tâcher de s'en convaincre (ou de chercher à en comprendre la raison) en tirant parti de l'étude des angles formés par les droites en jeu (aussi au programme d'étude à ce niveau). C'est en questionnant les observations et en établissant des liens entre les concepts qu'on peut espérer comprendre et organiser ses connaissances à l'intérieur d'une structure riche et logique (Hana, 2000), et c'est précisément ce que visent les mathématiques. Une telle organisation, qui permet par les nombreux liens qu'elle tisse d'en retrouver les éléments, libère par ailleurs de l'interminable mémorisation d'éléments isolés et donne tout son sens à cette phrase bien connue d'Édouard Herriot : « La culture, c'est ce qui reste quand on a tout oublié ». On a donc tout intérêt à instaurer en classe une culture du doute, où l'argument d'autorité n'a plus sa place et où les « pourquoi » et les « est-ce que c'est toujours vrai » sont au moins aussi importants que les « combien », les « quoi » ou les « comment ». Dans sa rigueur, la pensée mathématique a un côté rebelle qu'il convient de mettre en valeur.

La même approche peut s'appliquer à l'arithmétique et à l'algèbre. Par exemple, à la suite des contextes et des suites de nombres que présente *À vos maths !*[9] pour amener l'élève à dégager la « règle des signes », on pourrait compléter avec une justification mathématique qui fasse ressortir la cohérence interne de cette règle. Ce travail repose sur deux idées-clés qui ont dirigé la construction du savoir mathématique en général, et des nombres en particulier (Guedj, 1996) : d'une part, se

[8] *Perspective*, Manuel A, Volume 1, p. 85-87.
[9] *À vos maths !* Manuel A, p. 249-251.

permettre de faire avec de nouveaux objets ce qu'on ne pouvait pas faire avec les anciens – dans le cas de l'extension de N à Z, soustraire un plus grand nombre d'un plus petit ; d'autre part, assurer la coexistence de l'ancien avec le nouveau en ne mettant pas en péril les résultats déjà établis – faire en sorte ici que les propriétés de la multiplication dans N (en particulier la distributivité, l'élément absorbant et la commutativité) demeurent valables dans $Z-$. Comme autre exemple, on pourrait plus tard, lors de l'entrée dans l'algèbre, reconnaître que « résoudre une équation, c'est encore démontrer » (Gandit et Demongeot, 1996), en faisant ressortir les raisons qui permettent d'assurer l'équivalence des équations (c.-à-d. ayant mêmes solutions) ou l'implication qui les lie (ex. si ce produit est nul, alors au moins un des facteurs est nul).

L'explicitation des liens entre concepts ou entre concepts et processus n'apparaît pas souvent dans les manuels de première secondaire. En fait, on sent une volonté (ou peut-être une consigne) de réduire au minimum la place occupée par l'exposé du savoir mathématique au profit d'activités d'apprentissage ou d'application. L'explicitation du savoir n'occupe en effet qu'entre 3 % et 13 % de l'espace du livre, selon la collection. Souvent isolé dans des encadrés qui encapsulent l'information associée à un élément de ce savoir, l'exposé se réduit aux définitions, à l'énoncé des propriétés, aux procédures, aux « règles » ou aux « formules ». Si plusieurs des activités des manuels ont été habilement conçues pour faire découvrir l'existence de liens, l'explication de propriétés et la justification des procédures, il reste que ces aspects du savoir n'ont pas un statut officiel dans le livre de l'élève et que leur mise en évidence et leur valorisation institutionnelle reposent essentiellement sur les épaules de l'enseignant. Sans nier la valeur des activités présentées par les manuels, on peut néanmoins se demander s'il n'y aurait pas intérêt à doter aussi l'élève d'un ouvrage de référence pour les mathématiques du secondaire, qui serait structuré selon une logique des savoirs et afficherait clairement le pourquoi des choses. Dans cette direction, les livres de Deledicq[10] nous semblent constituer un modèle intéressant qu'on pourrait vouloir adapter aux programmes du Québec.

Expliciter dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques les propriétés qui expliquent les faits observés et justifient les processus permet de valoriser les termes et leurs définitions comme outils pour raisonner et, par conséquent, s'inscrit aussi dans le développement de la Compétence 3 « Communiquer avec le langage mathématique ». Car il y a une dimension langagière aux mathématiques, qui s'exprime dans différents registres (verbal, symbolique ou graphique). Développer une culture mathématique, c'est aussi s'approprier ce langage et en comprendre le rôle et la portée. Comme nous le laisse entendre Stendhal, cette attention portée à l'explicitation pourrait même avoir des effets qui débordent des connaissances mathématiques : « Ma cohabitation passionnée avec les mathématiques m'a laissé un amour fou pour les bonnes définitions, sans lesquelles il n'y a que des à-peu-près. »

[10] Deledicq, A. (2004) *Maths – Collège*, Paris, Éditions de la Cité.
Deledicq, A. (2004) *Maths – Lycée*, Paris, Éditions de la Cité.

LE RAPPORT AU « RÉEL »[11]

Une vision essentiellement puriste des mathématiques pourrait confiner l'enseignement de cette discipline au niveau abstrait où se situent les objets mathématiques enseignés, les liens qui les unissent et les structures qui en rendent compte. Mais ce serait faire silence à la fois sur les nombreux problèmes issus de la nature ou de la vie courante qui ont favorisé le développement des mathématiques, et sur l'utilisation croissante des mathématiques dans les différents secteurs d'activité humaine, qui explique la place qu'elles occupent actuellement dans le cursus scolaire. Sans pour autant s'y réduire, une culture mathématique se doit d'inclure une prise en compte du rapport au réel, autant dans la construction du savoir mathématique que dans son application. Et les raisons pour aller dans ce sens vont au-delà du soutien à la motivation de l'élève, auquel peut donner lieu une contextualisation des mathématiques à différents domaines de réalité.

À travers les repères culturels et la Compétence 1 « Résoudre une situation-problème », le programme vise un transfert aux situations extramathématiques des connaissances développées en mathématiques. Le « décodage des éléments qui se prêtent à un traitement mathématique » et la « représentation de la situation-problème par un modèle mathématique », présentés comme composantes de cette compétence, relèvent de la modélisation mathématique. De fait, avec les technologies qui permettent d'explorer et de résoudre des problèmes de plus en plus complexes et donc d'aborder des pans de la réalité de plus en plus vastes, la modélisation a considérablement gagné en importance dans la pratique mathématique, au point d'être considérée maintenant par certains mathématiciens comme une des composantes essentielles des mathématiques[12] et un des enjeux principaux de leur enseignement (Bouleau, 2000). Or le passage de connaissances mathématiques à de véritables compétences de modélisation est loin d'aller de soi et nécessite un travail explicite en ce sens qui dépasse un simple « éveil à l'applicabilité » des mathématiques et requiert de l'enseignant un subtil dosage des consignes, du temps alloué et des ressources. En plus du niveau de structuration de ses connaissances (Caron, 2003), la capacité à modéliser d'un étudiant dépend de son expérience de la complexité, de ses compétences de communication et du niveau d'intégration de la technologie à sa pratique mathématique (Caron et Bélair, 2006).

Par le temps qu'elle requiert et la nécessité de miser sur les intérêts individuels des élèves (pour éviter que le contexte d'application ne s'instaure en obstacle), la modélisation constitue une des raisons d'intégrer des projets d'élèves à l'apprentissage des mathématiques. Les manuels offrent plusieurs idées de projets intéressants (ex. l'étude du réchauffement de nos hivers proposée par *Perspective*[13]). Pour que de tels projets puissent contribuer au développement de compétences de modélisation, il importe de laisser le soin à l'élève de choisir les mathématiques qu'il met à contribution (Caron et Muller, 2005). Idéalement, on favorisera la comparaison de différents modèles créés par les élèves

[11] Ce titre demanderait à définir ce qu'on entend par « réel » et « réalité ». Comme il n'existe pas de consensus sur une question aussi vaste, nous viserons large en incluant autant les situations auxquelles sont confrontées des sociétés que les phénomènes naturels, les procédés artificiels ou les objets technologiques ; en fait, tout ce qui se situe à l'extérieur des mathématiques mais qui participe à créer le besoin de mathématiques pour mieux comprendre, expliquer, prédire, décider, agir ou construire.

[12] Après avoir été longtemps vues comme science des grandeurs, puis, plus récemment, comme science des structures, les mathématiques sont de plus en plus décrites comme science des modèles, ou science du calcul, de la modélisation et de la démonstration (Ronald Brown, Yves Lafont).

[13] *Perspective*, Manuel A, Volume 2, p. 230-231.

pour en faire ressortir les ressemblances et les différences, les apports et les limites. Et on ira au-delà de la régression gérée par la calculatrice (à laquelle la modélisation se voit souvent réduite au second cycle du secondaire) en visant le caractère explicatif du modèle : cela demande de comparer, de décrire le changement, de chercher les invariants, d'avancer des hypothèses, de combiner à un niveau global des relations simples qu'on aura pu définir à un niveau local, etc.

La modélisation donne aussi un sens particulier à l'apprentissage de la statistique. En découvrant les différentes formes de distributions qui correspondent aux phénomènes examinés (naturels ou sociaux) et en appréciant la variabilité des échantillons associés à une même distribution, l'élève apprend avec la statistique à connaître « la variabilité du monde » qui échappe aux modèles déterministes (Wozniak, 2005 ; Kahane, 2002). La loi de probabilité devient ensuite la façon de retrouver l'invariance dans cette variabilité, qui permettra de prédire, expliquer, évaluer et décider. Ainsi, un enseignement culturel de la statistique peut viser bien plus que le décodage de l'information transmise au citoyen et au consommateur. Mais cela demande de développer une culture du questionnement, de l'analyse, de l'interprétation et de la communication en mathématiques.

Finalement, il nous faut revenir sur le rôle des outils informatiques dans la modélisation mathématique de la complexité du réel ; ce rôle essentiel contribue fortement à justifier leur intégration dans l'apprentissage des mathématiques. L'incidence radicale de la technologie sur la pratique mathématique (pure ou appliquée) demande de ne pas en limiter l'utilisation à une aide à l'enseignement (ou à l'apprentissage) d'un même savoir traditionnel. Une intégration réussie des outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques au secondaire et au collégial devrait ouvrir progressivement vers les nouvelles approches qu'ils permettent (exploration graphique, collecte et traitement de données, méthodes itératives, simulations, etc.) pour traiter des problèmes plus complexes et aborder ainsi un champ plus vaste de situations réelles. L'élève ne pourra néanmoins exercer un réel contrôle sur les productions de ces outils que s'il est exposé à certains des mécanismes, algorithmes et contraintes qui leur sont propres. Puisque l'informatique n'est curieusement pas couverte par le programme de science et technologie au secondaire, sans doute revient-il à l'enseignant de mathématiques d'en faire connaître les éléments qui influencent l'activité mathématique de ses élèves et qui contribuent à façonner une nouvelle culture mathématique. Enfin, dans le souci de prolonger la perspective historique aux développements contemporains et d'« éveiller à l'applicabilité des mathématiques », on pourrait, comme le font déjà certains manuels, montrer le rôle fondamental qu'elles ont joué et qu'elles continuent de jouer en informatique : en cryptographie (évoquée dans *Panoramath*[14]), en infographie, etc. Ces nouveaux champs d'application, où le virtuel constitue une couche entre le réel et le mathématisé, multiplient les occasions d'utiliser les mathématiques et créent de nouvelles demandes pour en poursuivre le développement.

CONCLUSION

Une culture mathématique qui permette « d'identifier et de comprendre les divers rôles joués par les mathématiques dans le Monde, de porter des jugements fondés à leur propos et de s'engager dans des activités mathématiques, en fonction des exigences de sa vie présente et future », ne peut que reposer

[14] *Panoram@th*, Manuel A, Volume 1, p. 102-103.

sur un vaste réseau de connaissances et une expérience riche et variée de la pratique mathématique. Si les nouveaux programmes et manuels semblent à bien des égards vouloir relever un tel défi, il convient de prendre certaines précautions pour faire en sorte qu'une profondeur accompagne l'ampleur du territoire qu'on se propose de faire parcourir à l'élève, et que celui-ci ressorte proprement outillé des explorations qu'il aura pu y faire. Il y a tant à comprendre de la fréquentation des mathématiques qu'il serait malheureux que, glissant par manque de temps de la culture au tourisme, on se contente de n'y faire qu'un « bien beau voyage ».

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Bouleau, N. (2000) Y a-t-il lieu d'envisager des mathématiques postmodernes ? *Actes du colloque EM2000.*

Caron, F. (2003) *Où sont les mathématiques quand on a besoin d'elles ?* Montréal, Éditions Bande didactique.

Caron, F. et Bélair, J. (2006) Exploring university students' competencies in modelling, In C. Haines, P. Galbraith, W.Blum, S. Khan (dir.) *Mathematical Modelling : Education, Engineering and Economics.* Chichester, Horwood Publishing. À paraître.

Caron, F. et Muller, E. (2005) « L'intégration de l'application et de la modélisation dans les mathématiques au secondaire et au collégial », *Actes de la 28e Rencontre annuelle du Groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques*, p. 63-80.

Charnay, R. (2002) Pour une culture mathématique dès l'école primaire. *Bulletin de l'APMEP* 441, p. 409- 417.

Dreyfus, T. (1999) Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics* 38, p. 85–109.

Dumont, F. (1968), *Le lieu de l'homme : la culture comme distance et mémoire*, Montréal, Éditions HMH, Montréal, 1968.

Gandit, M. et Demongeot, M-C. (1996) *Le vrai et le faux en mathématiques*, IREM de Grenoble.

Gouvernement du Québec (1997). *Réaffirmer l'école : prendre le virage du succès - Rapport du Groupe de travail sur la réforme du curriculum.* Québec, Ministère de l'éducation.

Gouvernement du Québec (2003a). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle.* Québec, Ministère de l'Éducation.

Gouvernement du Québec (2003b). *L'intégration de la dimension culturelle à l'école. Document de référence à l'intention du personnel enseignant.* Québec, Ministère de l'Éducation.

Gouvernement du Québec (2001). *Programme de formation de l'école québécoise. Éducation préscolaire – Enseignement primaire.* Québec, Ministère de l'Éducation.

Guedj, D. (1997) *La gratuité ne vaut plus rien.* Paris, Éditions du Seuil.

Guedj, D. (1996) *L'empire des nombres.* Paris, Éditions Gallimard.

Hana, G. (2000) Proof, Explanation and Exploration : *An overview. Educational Studies in Mathematics* 44, 5–23.

Kahane, J.P. (dir.) (2002) *Enseignement des sciences mathématiques : Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques : Rapport au ministre de l'éducation nationale*. Paris, Éditions Odile Jacob.

Organisation de coopération et de développement économiques (2001). *Connaissances et compétences : des atouts pour la vie*. Paris, Éditions de l'OCDE.

Sangalli, A. (2001) *Éloge du flou – Aux frontières des mathématiques et de l'intelligence artificielle*. Les Presses de l'Université de Montréal.

Wozniak, F. (2005) *Conditions et contraintes de l'enseignement de la statistique en classe de seconde générale – Un repérage didactique*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard – Lyon.