Les différents acteurs d'une situation d'apprentissage par problème : un exemple[1]

Nicolas Pfister
Cégep de Sherbrooke

RÉSUMÉ

Rédiger une situation d'apprentissage par problèmes dans le but d'amener les élèves à acquérir des connaissances théoriques en mathématiques n'est pas chose facile. Nous proposons ici une analyse à posteriori d'un travail de session proposé dans le cadre d'un cours d'algèbre linéaire de niveau collégial. Cette analyse nous a permis de mettre en évidence quatre personnages qui interviennent à tour de rôle dans ce genre d'apprentissage : le texte de la situation problème, l'élève, le professeur et le manuel de classe. Nous pensons qu'une définition précise du rôle de chacun de ces personnages peut aider à rédiger des projets qui vont encourager l'élève à construire un savoir mathématique de manière relativement autonome.

INTRODUCTION

Dans un premier cours d'algèbre linéaire de niveau collégial, la plupart des thèmes abordés utilisent comme objets d'étude les vecteurs, les matrices et les systèmes d'équations linéaires. Ces objets et les situations dans lesquelles on les retrouve amènent les élèves à explorer les concepts de combinaison linéaire, d'indépendance linéaire et de base, trois concepts qui ont tous comme toile de fond la structure d'espace vectoriel. L'introduction des espaces vectoriels, dans le cadre du cours d'algèbre linéaire, est alors pour la plupart des élèves l'occasion d'un premier contact formel avec une structure algébrique. Dans la majorité des cas, cette structure est essentiellement présentée à l'aide de situations faisant intervenir les espaces géométriques $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ bien que parfois on y retrouve également des contextes tirés d'espaces plus abstraits tels $\mathbb{R}^n$, les matrices de format $m \times n$ et éventuellement des espaces de polynômes. Toutes ces situations qui mettent en jeu la structure d'espace vectoriel et l'étude du comportement d'objets (vecteurs, matrices, fonctions, etc...) relativement aux opérations d'addition vectorielle et de multiplication par un scalaire, ont en commun le développement d'un même schème de pensée chez l'élève : l'introduction au formalisme algébrique et à un raisonnement déductif basé sur des définitions. C'est dans le développement de ce schème de pensée, induit par un premier contact avec les structures algébriques et en particulier avec celle plus primitive associée aux scalaires, que nous avons cherché un prétexte pour tenter d'amener les élèves du programme de Sciences de la nature à construire un savoir mathématique de manière relativement autonome en leur

[1]Note de l'éditeur : cet article est une version légèrement modifiée d'un texte publié dans les Actes du Congrès AMQ 2006 (Sherbrooke).

proposant un travail de session dans le cadre de leur cours d'algèbre linéaire. Cette construction est soutenue par quelques brèves mises en situation et par un certain nombre de questions regroupées dans un questionnaire. Celui-ci va servir de canevas pour le travail des élèves, un travail qui suivra un cheminement distinct mais non indépendant des notions étudiées dans la partie magistrale du cours telles que proposées dans le manuel utilisé.

1. Le canevas de travail et les acteurs

Nous voulons présenter ici la structure du canevas de travail en essayant de mettre en évidence la redistribution des rôles imposée aux différents acteurs qui interviennent lorsque l'on met les élèves devant une situation « par problème ». Chacun des acteurs apporte avec lui une part des connaissances qui seront nécessaires à la construction de ce nouveau savoir :

- le questionnaire qui agit comme maître du jeu : les connaissances qu'il propose ne peuvent être remises en question et tous les autres acteurs sont assujettis à sa volonté ou à tout le moins semblent l'être ;
- le professeur qui doit savoir, par ses interventions auprès des élèves, mettre une certaine distance entre ses connaissances et celles exigées par le questionnaire ;
- le manuel toujours prêt à rendre service à tout le monde mais dont la connaissance, quoique immédiatement disponible, ne correspond pas toujours à ce que l'on souhaite ;
- l'élève qui, avec son baluchon de connaissances préalables, devra apprendre à négocier ce qu'il possède avec les trois autres acteurs pour obtenir d'eux ce dont il a besoin.

Au Cégep de Sherbrooke, le cours d'algèbre linéaire du programme de Sciences de la nature est offert aux élèves lors de leur troisième ou quatrième session. Même si les cours de calcul différentiel et de calcul intégral de ce programme ne sont pas préalables au cours d'algèbre linéaire, la plupart des élèves qui y sont inscrits ont tout de même suivi ces deux cours lors de leurs deux premières sessions. Depuis plusieurs années, le manuel utilisé pour le cours d'algèbre linéaire au Cégep de Sherbrooke est le livre *Vecteurs, matrices et nombres complexes* de Vincent Papillon. Ce livre joue un double rôle dans ce travail de session puisque, d'une part, le questionnaire y fait fréquemment référence, et d'autre part la structure du travail est étroitement associée à l'orientation du cours proposée par le livre. L'auteur a choisi d'utiliser une présentation axiomatique des concepts de déterminant et de produit vectoriel basée sur leurs propriétés géométriques : les formules de calcul du déterminant et du produit vectoriel sont alors des conséquences de ces propriétés. Ceci n'est toutefois pas le cas de la présentation du produit scalaire où les propriétés de ce produit sont établies après avoir défini la façon de le calculer. Le travail examine la possibilité de reprendre l'approche axiomatique dans le cas du produit scalaire. Cette relative proximité entre le savoir proposé par le livre et celui que le travail suggère de construire a pour but d'amener l'élève à considérer le manuel comme un coéquipier à part entière dans la réalisation du travail ; comme n'importe quel autre élève, le manuel possède un certain nombre de connaissances pouvant être utiles et bien que ce coéquipier ait toujours raison, il n'est pas toujours facile de le faire parler et il faut parfois « réfléchir ensemble » si on veut en tirer quelque chose. Par ailleurs, le manuel de Papillon propose comme point de départ du cours d'algèbre linéaire les concepts de vecteur géométrique et d'espace vectoriel. Ce choix permet d'entreprendre très rapidement le travail et ainsi le répartir sur l'ensemble de la session.

Le travail est divisé en trois parties et l'énoncé de la première partie est distribué aux élèves dès le début de la troisième semaine de cours. Les deuxième et troisième parties sont distribuées aux élèves après le premier et le second examen, c'est-à-dire vers la 7^{e} semaine de cours et la 11^{e} semaine de cours respectivement. Chacune des parties du projet est encadrée par un texte de mise en situation accompagné d'une série de questions, celles-ci servant de canevas de travail pour les élèves. Les élèves sont regroupés en équipe de deux, (trois si on compte le manuel) et disposent de deux semaines pour compléter chacune des parties. Pendant cette période on alloue une heure de temps de classe par semaine à ce projet. Les équipes sont également encouragées à rencontrer le professeur au moins deux fois en dehors des heures de classe afin de discuter des solutions envisagées. Lors de ces rencontres, le professeur se contente de jouer le rôle d'interprète entre l'élève, le questionnaire et le manuel. Les travaux des élèves sont corrigés et leur sont remis avant qu'ils n'entreprennent la partie suivante.

La formulation des questions du canevas de travail, bien que parfois relativement précise quant à la nature du résultat souhaité pour certaines d'entre elles, n'exige ni ne propose que très rarement l'application de méthodes spécifiques. Toute référence à un objet mathématique qui mettrait l'élève sur la piste d'une solution toute faite est soigneusement évitée. La compréhension de la question elle-même occupe souvent une bonne partie de la réflexion des élèves. En fait, dans bien des cas, on ne peut comprendre le sens véritable d'une question qu'après y avoir répondu ; toutes les questions sont reliées entre elles, soit à partir du résultat, soit à partir de la méthode, et les liens ne sont pas explicitement faits ou suggérés dans le questionnaire. À quelques endroits, la question porte sur un cas particulier et son intérêt véritable réside dans la généralisation qu'on peut en faire ou dans la méthode choisie pour la traiter. Le rôle des questions est d'orienter la recherche et les travaux des élèves tout en leur laissant une grande autonomie dans leur cheminement individuel. La correction et la remise des travaux permet une rétroaction entre chacune des parties, ce qui laisse aux élèves la possibilité d'un certain réajustement en prévision de la prochaine partie.

À travers la série de questions du canevas proposé, l'élève est amené à envisager le fait que les nombres réels ne sont qu'une représentation particulière d'objets dont le comportement axiomatique permet de caractériser le concept de scalaire. Cette axiomatisation des scalaires permet d'obtenir une généralisation de ces nombres et demande alors d'examiner les conséquences de cette généralisation sur la définition du produit scalaire. La généralisation du concept de scalaire va suggérer aux élèves une formulation et une notation pour de nouveaux nombres (les complexes pour ne pas les nommer) puis leur demander d'établir une formule de calcul du produit scalaire des vecteurs définis sur le corps de ces nouveaux nombres à partir des propriétés de ce produit.

Les connaissances nécessaires aux élèves dans les différentes parties du travail sont les suivantes :

- la première partie propose aux élèves d'explorer la notion de corps. Cette exploration doit les amener à obtenir un nouvel ensemble de scalaires construits à partir de couples de réels. Ce nouvel ensemble de scalaires servira à définir un espace vectoriel et une base de cet espace vectoriel ;
- la seconde partie a pour but de comprendre que les réels forment un « sous-corps » des scalaires

couples puis de développer une notation qui en facilitera l'écriture. Dans cette seconde partie, les élèves seront amenés à construire un isomorphisme ;

- dans la troisième partie, les propriétés du produit scalaire sur les réels sont redéfinies afin de rendre cohérente la formule de calcul de ce produit avec la généralisation des scalaires obtenue dans la première partie.

2. Le travail : premier acte

Dans la première partie du travail, la mise en situation établit un parallèle entre la structure d'espace vectoriel telle que définie dans le livre de Papillon (page 40) et celle de corps (qui n'est évidemment pas présentée dans le livre). Le canevas de travail propose à l'élève les deux définitions suivantes :

Un espace vectoriel sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est la donnée :	Nous conviendrons d'appeler « corps » tout ensemble (dont les éléments seront appelés scalaires) muni de deux opérations (appelées addition et multiplication) telles que
i) d'un ensemble V dont les éléments sont appelés des vecteurs et sont notés $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, etc. ; ii) d'une opération appelée addition vectorielle qui associe à chaque paire de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ un vecteur noté $\vec{u}+\vec{v}$ et appelé somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, de telle façon que : a) l'addition est commutative : pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans V on a que $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$, b) l'addition est associative : pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans V on a que $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$, c) il existe dans V un élément neutre noté $\vec{0}$, et appelé le vecteur nul pour lequel, pour tout $\vec{v}$ dans V, on a que $\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$, d) pour chaque vecteur $\vec{v}$ dans V, il existe dans V un vecteur, noté $-\vec{v}$, et appelé l'opposé de $\vec{v}$, tel que $\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$; iii) d'une opération appelée multiplication par un scalaire qui associe à chaque nombre réel k et à chaque vecteur $\vec{v}$ un vecteur noté $k\vec{v}$ et appelé produit de k et de $\vec{v}$ de telle façon que a) la multiplication par un scalaire est pseudo-associative : pour tous nombres réels k et l, et pour tout vecteur $\vec{v}$ dans V, on a que $k(l\vec{v})=(kl)\vec{v}$, b) la multiplication par un scalaire est distributive relativement à l'addition des réels : pour tous nombres réels k et l, et pour tout vecteur $\vec{v}$ dans V, on a que $(k+l)\vec{v}=k\vec{v}+l\vec{v}$, c) la multiplication par un scalaire est distributive relativement à l'addition des vecteurs : pour tout nombre réel k et pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans V, on a que $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$, d) il existe dans $\mathbb{R}$ un élément neutre noté 1 pour lequel, pour tout $\vec{v}$ dans V, on a que $1\vec{v}=\vec{v}$.	1) On puisse additionner les scalaires A) la somme de deux scalaires k et l notée $k+l$ doit être un scalaire (fermeture de l'ensemble des scalaires pour l'addition), B) l'addition des scalaires doit être commutative : pour tous scalaires k et l on a que $k+l=l+k$, C) l'addition des scalaires doit être associative : pour tous scalaires k, l et m, on a que $(k+l)+m=k+(l+m)$, D) l'addition des scalaires doit admettre un élément neutre, noté 0, tel que pour tout scalaire k, on a que $0+k=k$, E) tout scalaire k doit admettre un symétrique pour l'addition appelé opposé de k : pour tout scalaire k, il existe un scalaire noté k' tel que $k+k'=0$, où 0 est l'élément neutre défini en D). 2) On puisse multiplier les scalaires entre eux A) le produit de deux scalaires k et l noté kl doit être un scalaire (fermeture de l'ensemble des scalaires pour la multiplication), B) la multiplication des scalaires doit être commutative : pour tous scalaires k et l on a que $kl=lk$, C) la multiplication des scalaires doit être associative : pour tous scalaires k, l et m, on a que $(kl)m=k(lm)$, D) la multiplication des scalaires doit admettre un élément neutre, noté 1, tel que pour tout scalaire k, on a que $1k=k$, E) tout scalaire k, **sauf 0, l'élément neutre pour l'addition**, doit admettre un symétrique pour la multiplication appelé inverse de k : pour tout scalaire k, il existe un scalaire noté k* tel que $kk^*=1$, où 1 est l'élément neutre défini en D ; 3) L'addition et la multiplication des scalaires soient compatibles : La multiplication doit être distributive relativement à l'addition : pour tous scalaires k, l et m, on a que $k(l+m)=kl+km$.

Dans la présentation magistrale du cours qui précède cette partie, l'élève a été exposé aux concepts de vecteurs, d'addition vectorielle, de multiplication par un scalaire, de combinaison linéaire, d'indépendance linéaire, de base d'un espace et de composantes d'un vecteur. Toutefois, aucun des problèmes proposés par le manuel ne porte spécifiquement sur la structure d'espace vectoriel. Les propriétés de cette structure ont été observées sur des vecteurs du plan, mais comme elles semblent « parfaitement naturelles », les élèves n'y attachent que peu d'importance. Par ailleurs, pour l'élève, il n'existe à priori que très peu de différences entre les deux définitions proposées. Dans les deux cas, on y retrouve une opération d'addition et une opération de multiplication auxquelles sont rattachées une liste de propriétés qui à première vue sont les mêmes. Certaines de ces propriétés : la commutativité, l'associativité et la distributivité, évoquent quelques souvenirs à l'élève alors que les propriétés de fermeture, de neutre et de symétrique ne font à peu près pas partie de son vocabulaire. La confusion entretenue par la similitude des deux structures est particulièrement présente dans la comparaison des propriétés d'existence d'un neutre dans la multiplication des vecteurs par un scalaire (propriété iii d des espaces vectoriels) et d'un neutre dans la multiplication des scalaires (propriété 2 D des corps). La ressemblance de ces deux propriétés et le lien qui existe entre l'idée de neutre et celle de symétrique pour la multiplication des scalaires ont pour conséquence que plus tard dans le cours, lors de la résolution de problèmes associés aux espaces vectoriels, l'élève sera parfois tenté de créer des symétriques pour les vecteurs relativement à l'opération de multiplication par un scalaire.

La présence des propriétés de fermeture est également mystérieuse pour plusieurs puisqu'il est bien évident que la somme de deux vecteurs ne peut être qu'un vecteur et qu'il est impossible d'imaginer que le produit de deux nombres ait pour résultat autre chose qu'un nombre. Toutefois, après avoir convenu d'appeler scalaires les éléments d'un corps tel que le propose le questionnaire, les élèves n'ont aucune objection à ce que les réels munis des opérations d'addition et de multiplication « usuelles » aient droit à ce titre. La première question du travail va alors tenter de provoquer une certaine remise en question de l'évidence des propriétés.

Question 1

Considérons l'ensemble $K_2 = \{0, 1\}$.

Définir une opération d'addition et une opération de multiplication sur $K_2 = \{0, 1\}$ *qui fassent de cet ensemble (muni de ces deux opérations) un corps.*

La première difficulté que rencontre l'élève face à cette question est le sens qu'il doit donner au mot définir. L'élève est conscient que ce mot représente le seul indice sur la méthode qu'il doit employer pour arriver au résultat exigé. Le problème n'est toutefois pas de trouver la réponse à la question ; cette réponse, il la connaît, celle-ci ne peut être que bien évidemment :

$$\begin{array}{ccc} 0+0=0 & & 0\times 0=0 \\ 0+1=1 & \text{et} & 0\times 1=0 \\ 1+0=1 & & 1\times 0=0 \\ 1+1=2 & & 1\times 1=1 \end{array}$$

Ce qui inquiète l'élève, c'est qu'il se sent obligé de présenter un raisonnement ou une démarche lui permettant de justifier à priori cette réponse et surtout que cette démarche corresponde à ce que le professeur, à travers cette question, semble exiger de lui lorsqu'il lui demande de « définir des opérations ». Comme le mot « définir » ne représente pas une instruction suffisamment explicite, la question est ici perçue par l'élève comme un mauvais intermédiaire entre ses connaissances et les exigences du professeur. Celui-ci doit alors essayer de se dissocier des demandes du questionnaire en se bornant à jouer le rôle d'interprète entre l'élève et le questionnaire. Le professeur peut par exemple suggérer à l'élève que le mot « définir » en mathématiques prend souvent le sens de « créer ». Presque invariablement, la réaction de l'élève est alors de poser la question : « On peut donc faire ce qu'on veut ? »

Il serait possible de restreindre cette apparence de liberté dans le choix des opérations en faisant la liste des 16 opérations possibles sur un ensemble à deux éléments, puis en éliminant les opérations ne répondant pas aux propriétés d'un corps. Toutefois aucun élève n'envisage cette façon de faire d'autant plus que pour cela, il faudrait tout d'abord satisfaire à la propriété de fermeture des opérations, propriété qui, comme nous l'avons dit, n'a que très peu de sens pour l'élève. En effet, non seulement l'élève ne voit aucun inconvénient à écrire que $1+1=2$ dans cet ensemble, mais dans son esprit c'est également le seul choix possible. Une intervention du professeur est donc nécessaire afin de l'amener à établir le lien entre sa définition des opérations et les exigences posées par la définition d'un corps. Étonnamment, lorsque l'élève prend conscience que $1+1$ ne peut faire 2, mais doit faire 0 ou 1, cela renforce son impression que « l'on peut faire ce que l'on veut » dans cette question. Ceci a comme conséquence que dans certains cas, il se met à explorer différentes possibilités d'opérations. Certains élèves essaient d'obtenir une symétrie dans les deux opérations, ce qui donne le résultat suivant :

$$\begin{array}{c} 0+0=0 \\ 0+1=1 \\ 1+0=1 \\ 1+1=0 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} 0\times 0=1 \\ 0\times 1=0 \\ 1\times 0=0 \\ 1\times 1=1 \end{array}$$

Ces deux opérations sont en fait deux fois l'opération d'addition où le rôle du neutre est tenu par 0 dans la première et par 1 dans la seconde. L'élève ne voit évidemment pas le problème de l'existence du symétrique pour le neutre de la multiplication, et seule la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition peut lui permettre de constater son erreur. Malheureusement, c'est également la onzième et dernière propriété de la liste.

La deuxième question du travail propose de comparer le comportement d'une opération de multiplication « naturelle » et d'une opération de multiplication « artificielle » sur un ensemble formé de couples de réels.

Question 2

Considérons l'ensemble $K_{(\alpha,\beta)} = \{(\alpha,\beta) \mid \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta \in \mathbb{R}\}$.

Dans cet ensemble, deux éléments (α_1,β_1) *et* (α_2,β_2) *sont égaux si et seulement si*

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 \\ \beta_1 = \beta_2 \end{cases} .$$

a) *Vos professeurs ont vérifié que l'addition terme à terme de ces éléments (semblable à celle dans $\mathbb{R}^2$), satisfait bien les cinq premières propriétés caractéristiques des corps. Expliquer pourquoi la multiplication terme à terme de ces éléments, jumelée avec l'addition terme à terme, ne fait pas de $K_{(\alpha,\beta)}$ un corps.*

b) *Considérons maintenant l'opération suivante que nous appellerons multiplication sur $K_{(\alpha,\beta)}$: $(\alpha_1, \beta_1)(\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$. En admettant que cette opération est commutative et associative, démontrer que l'ensemble $K_{(\alpha,\beta)}$ muni de l'addition terme à terme et de cette multiplication est bien un corps.*

Dans la partie a) de la question, l'enjeu propose d'examiner les propriétés de l'opération de multiplication terme à terme sur l'ensemble $K_{(\alpha,\beta)}$ dans le but de mettre le doigt sur ce qui empêche cette opération de définir un corps. Malgré une demande relativement spécifique, l'élève va également inclure dans bien des cas la démonstration des propriétés de fermeture, de commutativité, d'associativité et de distributivité qui sont satisfaites par la multiplication terme à terme.

Dans cette première partie de la question, la forme que prennent le neutre et les symétriques pour l'opération de multiplication peut être devinée. Pour l'élève, il est relativement facile de « voir » que l'élément neutre de l'opération de multiplication est donné par le couple $(1, 1)$ et que le symétrique d'un élément (α, β) est de la forme $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right)$. Contrairement à la question 1, le fait de donner ces réponses sans les accompagner d'une procédure ne semble pas inquiéter l'élève dans ce cas-ci. C'est peut-être la notion de contre-exemple, sous-jacente à cette question, qui libère l'élève du besoin de présenter une démarche justifiant son résultat. Par contre, il lui est beaucoup plus difficile d'expliquer en quoi la forme du symétrique ne satisfait pas aux exigences posées par la définition d'un corps. Bien que le problème de la division par zéro ait été présent tout au long de leur cours de calcul différentiel, il leur semble difficile de faire l'association entre l'expression $\frac{1}{\alpha}$ et l'expression $\frac{1}{0}$. La réflexion de l'élève s'articule autour du fait que toutes les autres propriétés étant satisfaites, s'il y a problème cela doit nécessairement provenir de l'existence des symétriques exigée par le questionnaire. Cette obligation de résultat l'amène éventuellement à considérer que des couples tels $(2, 0)$ n'ont pas de symétriques et ne sont pas non plus neutres pour l'opération d'addition. Pour l'élève qui n'a fait qu'exhiber le couple $(1, 1)$ sans justifier que c'est le seul possible, le professeur, lors des rencontres avec les équipes, pourrait toutefois intervenir en lui demandant si l'on peut penser qu'un autre neutre pour la multiplication permettrait de satisfaire à la propriété d'existence des symétriques.

Dans la deuxième partie de la question, l'opération de multiplication entre les scalaires « couples » proposée implique des opérations de multiplication, d'addition et de soustraction de réels, ce qui peut empêcher l'élève dans certains cas d'accepter cette opération comme une « vraie » opération de multiplication et l'amener à la considérer comme « artificielle ». Il faut toutefois remarquer que la partie magistrale du cours n'a pas encore abordé le produit scalaire ni le produit vectoriel, deux produits qui amènent ce genre de considérations. L'existence du neutre et des symétriques pour cette opération de multiplication « artificielle » ne peut plus être devinée et aucune méthode n'est proposée pour résoudre ce problème. Cela oblige alors l'élève à interpréter correctement les définitions des deux propriétés et à transposer le problème en termes de couples.

Dans le cas du neutre pour la multiplication, l'élève devra poser un couple inconnu (x, y) de $K_{(\alpha,\beta)}$ tel que pour tout couple (α, β) de $K_{(\alpha,\beta)}$ on ait que

$$(\alpha, \beta)(x, y) = (\alpha, \beta),$$

ce qui, après avoir appliqué la définition de la multiplication, devient

$$(\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x) = (\alpha, \beta).$$

En invoquant la définition de l'égalité donnée dans cette question, on a alors le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} \alpha x - \beta y = \alpha \\ \alpha y + \beta x = \beta \end{cases}$$

Sans avoir encore développé les méthodes de résolution de systèmes d'équations linéaires dans le cours, les élèves ont déjà été confrontés récemment à ce genre de problème lorsque les coefficients du système sont déterminés. On retrouve en effet un tel problème à la page 26 du manuel de Papillon :

Soit $\vec{u} = (3, 1), \vec{v} = (-2, 5)$ *et* $\vec{w} = (12, -13)$ *les expressions, dans une base donnée, de trois vecteurs d'un même plan.*

a) *Exprimez* $\vec{w}$ *comme combinaison linéaire de* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$.

Ce problème consiste à déterminer deux scalaires k et l solutions de l'équation vectorielle $k\vec{u} + l\vec{v} = \vec{w}$. En invoquant l'unicité des composantes d'un vecteur dans une base donnée, cela revient à résoudre un système de deux équations à deux inconnues à coefficients déterminés, tâche que les élèves accomplissent relativement facilement par une méthode de comparaison ou de substitution. Le manuel n'est malheureusement pas un coéquipier parfait : d'une part il n'interviendra pas à moins d'être sollicité par l'élève lui-même et d'autre part la solution qu'il pourrait proposer s'adapte mal au problème du questionnaire. La résolution de systèmes à coefficients indéterminés pose en effet beaucoup plus de difficultés aux élèves.

Le premier problème consiste à déterminer les lettres qu'il faut isoler puisqu'on n'est pas en présence de « chiffres et de lettres » mais bien uniquement de lettres. Pour résoudre ce genre de problème l'élève va essayer, comme dans le cas des coefficients déterminés, d'appliquer la méthode de comparaison ou celle de substitution. La méthode de comparaison se prête plutôt mal à ce problème, mais certains élèves vont tout de même faire une tentative pour obtenir deux équations dont le second membre est 0 pour pouvoir ensuite utiliser l'égalité des premiers membres. L'apparence de l'équation alors obtenue met souvent un terme à cette tentative.

Dans le cas de la méthode de substitution l'élève est amené à effectuer une division par un des coefficients indéterminés et donc éventuellement une division par zéro. Ici encore le problème de la division par zéro, qui prend la forme $x = \dfrac{\alpha + \beta y}{\alpha}$, n'est pas soulevé par l'élève puisque cette division n'apparaît pas de façon explicite.

Très peu d'élèves envisagent la possibilité d'utiliser la méthode d'élimination qui consiste à additionner les deux équations après avoir multiplié la première par α et la seconde par β, pour obtenir

$$\alpha^2 x - \alpha\beta y + \alpha\beta y + \beta^2 x = \alpha^2 + \beta^2,$$

c'est à dire

$$(\alpha^2+\beta^2)x = \alpha^2+\beta^2$$

ou encore

$$(\alpha^2+\beta^2)(x-1) = 0.$$

Cette dernière équation devant être satisfaite pour toute valeur de α et de β, cela implique que

$$x-1=0$$

et on obtient 1 comme valeur pour x, puis 0 comme valeur pour y en substituant la valeur de x dans une des équations initiales. Le neutre de cette opération de multiplication est donc le couple $(1,0)$.

Dans le cas de l'existence des symétriques pour la multiplication, l'élève ne pense généralement pas à exclure à priori le neutre de l'addition en posant comme problème de départ :

Soit $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ un couple de $K_{(\alpha,\beta)}$; cherchons un couple (x,y) de $K_{(\alpha,\beta)}$ tel que

$$(\alpha,\beta)(x,y) = (1,0).$$

Ce problème se ramène à la résolution d'un système semblable au précédent

$$\begin{cases} \alpha x - \beta y = 1 \\ \alpha y + \beta x = 0 \end{cases}$$

où encore une fois la méthode de substitution va amener les élèves à effectuer une éventuelle division par zéro. Peu importe la méthode de résolution employée, une bonne partie des élèves arrivent à la forme $\left(\dfrac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, \dfrac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)$ pour le symétrique du couple (α,β) et comme cette question exige de démontrer la validité de l'opération, l'élève conclut ainsi à l'existence du symétrique pour toute valeur de α et de β sans exclure le couple $(0,0)$ neutre de l'addition.

La dernière question de cette partie propose de définir des espaces vectoriels sur ces nouveaux scalaires formés de deux réels.

Question 3

Maintenant que nous savons que $K_{(\alpha,\beta)}$ muni des opérations définies à la question précédente est un corps et qu'il nous fournit des scalaires, nous sommes autorisés à parler d'espaces vectoriels sur $K_{(\alpha,\beta)}$. Par exemple, l'espace vectoriel $K^2_{(\alpha,\beta)}$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $\vec{v} = ((\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2))$, où les composantes (α_1,β_1) et *(α_2,β_2) sont des scalaires de $K_{(\alpha,\beta)}$.*

On effectue la somme de deux vecteurs de $K^2_{(\alpha,\beta)}$ composante à composante et la multiplication par un scalaire $k\vec{v}$ (où $k=(\lambda,\mu)$ est un scalaire de $K_{(\alpha,\beta)}$) en multipliant chacune des composantes du vecteur $\vec{v}$ par le scalaire k.

a) *Considérons l'ensemble ordonné $B = \langle((1,0),(0,0));((0,0),(0,1))\rangle$. Cet ensemble de deux vecteurs de $K^2_{(\alpha,\beta)}$ constitue-t-il une base de $K^2_{(\alpha,\beta)}$?*

b) *Exprimer le vecteur $\vec{v} = ((1,2),(3,4))$ comme une combinaison linéaire des éléments de B.*

Le problème qui consiste à déterminer si deux vecteurs exprimés relativement à une base d'un espace plan sur les réels constituent une base de cet espace a déjà été proposé en classe. Selon le manuel de Papillon (page 19), une base d'un espace E est « *un ensemble de vecteurs de E linéairement indépendants tel que tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire de ces vecteurs* ». La formulation de cette définition ne facilite pas la tâche et il n'est pas toujours aisé pour l'élève de comprendre que cette définition exige deux choses des vecteurs : (i) qu'ils soient linéairement indépendants et (ii) qu'ils forment un ensemble générateur de l'ensemble. Si le schème de pensée associé à ce problème n'est pas encore complètement maîtrisé, et ce malgré la présentation de quelques exemples en classe, il est tout de même relativement familier à l'élève. Dans la première partie de cette question, ce schème de pensée est mis à l'épreuve par le questionnaire en plaçant l'élève dans une situation où interviennent trois types d'objets possédant chacun leurs propres opérations avec leurs propriétés : les vecteurs, les scalaires « couples » et les scalaires réels. Ceci oblige l'élève à une certaine prudence dans ces manipulations afin d'utiliser la bonne opération au bon moment. Certains élèves vont également tenter de réutiliser la multiplication « naturelle », c'est-à-dire terme à terme, entre les scalaires de l'ensemble $K_{(\alpha,\beta)}$ alors que la question précédente les avait amenés à conclure qu'elle ne satisfaisait pas aux exigences d'un corps.

La définition d'indépendance linéaire de deux vecteurs telle que proposée par Papillon (page 18) fait appel à l'impossibilité d'écrire un vecteur comme combinaison linéaire de l'autre, ce qui propose à l'élève de travailler la structure de la preuve par contradiction. On suppose l'existence d'un scalaire $k = (\lambda, \mu)$ de $K_{(\alpha,\beta)}$ tel que

$$((0,0),(0,1)) = k((1,0),(0,0))\,,$$

ce qui, en effectuant la multiplication par un scalaire selon les opérations sur les composantes, s'écrit

$$((0,0),(0,1)) = (k(1,0), k(0,0))\,.$$

En invoquant par la question précédente que $(1,0)$ est neutre pour la multiplication et en observant que $(0,0)$ est absorbant pour la multiplication des scalaires couples, il vient

$$((0,0),(0,1)) = (k,(0,0))\,.$$

En faisant alors successivement appel à l'unicité des composantes et à la définition de l'égalité des scalaires couples, on obtient

$$\begin{cases} 0 = \lambda \\ 0 = \mu \\ 0 = 0 \\ 1 = 0\,. \end{cases}$$

Bien que la dernière égalité soit évidemment fausse pour les réels, les deux premières égalités peuvent laisser penser à l'élève que le scalaire k existe et qu'ainsi les deux vecteurs ne seraient pas linéairement indépendants. Si cette conclusion semble être encouragée par la formulation ouverte de la partie a) de la question, l'exigence fermée de la partie b) oblige toutefois l'élève à obtenir la contradiction souhaitée. Il est à noter que cette apparente contradiction entre le fait que certaines équations possèdent une solution alors que d'autres sont incohérentes dans un même système réapparaîtra beaucoup plus tard dans le cours au moment de l'application de la méthode de Gauss-Jordan.

Quoique semblable au problème précédent, le problème de vérifier si les deux vecteurs peuvent engendrer l'ensemble $K^2_{(\alpha,\beta)}$ présente un niveau de difficulté plus élevé. Ce problème exige de proposer un vecteur quelconque $\vec{v} = ((\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2))$ de $K^2_{(\alpha,\beta)}$ et de chercher à exprimer $\vec{v}$ comme combinaison linéaire des vecteurs de l'ensemble ordonné B, c'est-à-dire de déterminer deux scalaires $k_1 = (\lambda_1, \mu_1)$ et $k_2 = (\lambda_2, \mu_2)$ tels que

$$\vec{v} = k_1((1,0),(0,0)) + k_2((0,0),(0,1))\,.$$

Ce problème se ramène à résoudre un système de quatre équations à quatre inconnues dont la solution est presque systématiquement présentée par l'élève sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \lambda_1 \\ \beta_1 = \mu_1 \\ \alpha_2 = \mu_2 \\ \beta_2 = \lambda_2\,, \end{cases}$$

indiquant ainsi qu'il y a encore une certaine confusion dans son esprit entre les objets donnés et les objets cherchés.

La deuxième partie de cette question n'est qu'une simple application du résultat précédent, mais très rares sont les élèves qui vont la percevoir comme telle. La procédure de la question précédente ayant fait ses preuves avec des lettres, l'élève n'hésite pas à construire à nouveau le système d'équations et à répéter au grand complet la solution proposée précédemment en remplaçant les lettres par les chiffres.

3. Le travail : deuxième acte

Dans la deuxième partie du travail on propose à l'élève de faire le lien entre les scalaires « couples » et les scalaires réels puis d'obtenir une notation qui permettra de manipuler plus simplement ces scalaires « couples ». La portion magistrale du cours qui précède a permis de présenter les idées associées au produit scalaire, la projection orthogonale et les déterminants 2×2 et 3×3. Cette partie est entreprise en demandant à l'élève de considérer le sous-ensemble $K_{(\alpha,0)} = \{(\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ formé de tous les éléments de $K_{(\alpha,\beta)}$ dont le deuxième terme est nul, et d'examiner le comportement de ces éléments relativement aux opérations d'addition et de multiplication telles que définies sur l'ensemble $K_{(\alpha,\beta)}$ dans la première partie du travail. Le canevas de travail va préciser que l'ensemble $K_{(\alpha,0)}$ étant inclus dans l'ensemble $K_{(\alpha,\beta)}$, il hérite des propriétés du corps $K_{(\alpha,\beta)}$ qui ne font pas appel à la présence d'un scalaire particulier et ainsi les propriétés de commutativité, d'associativité et de distributivité des deux opérations étant satisfaites pour les scalaires de l'ensemble $K_{(\alpha,\beta)}$, elles le sont aussi pour les scalaires de l'ensemble $K_{(\alpha,0)}$.

Question 1

Vérifier si les propriétés qui ne sont pas héritées du corps $K_{(\alpha,\beta)}$ sont aussi satisfaites pour $K_{(\alpha,0)}$ muni de l'égalité et des opérations d'addition et de multiplication définies dans le premier travail. Conclure sur la nature de $K_{(\alpha,0)}$.

Cette question est en fait une transposition du « théorème » des sous-espaces vectoriels[2] . La notion de sous-espace vectoriel et les résultats qui lui sont associés ne sont ni présentés dans la partie magistrale du cours, ni abordés dans le manuel de Papillon[3]. L'élève ne dispose donc d'aucun modèle à suivre à l'exception des schèmes de pensées qui ont été exploités dans la première partie du travail. Il est donc naturel pour l'élève de vouloir réutiliser ces schèmes dans le cadre de cette nouvelle situation. Dans la première partie du travail, la possibilité de conclure sur la fermeture des opérations sur les scalaires « couples » de l'ensemble $K_{(\alpha,\beta)}$ n'exigeait de l'élève qu'une observation concernant le fait que le résultat de l'opération était bien un couple de réels. La validation de ce schème suite à la correction du premier travail, ajoutée au fait que la situation actuelle présente suffisamment de ressemblance avec celle de la première partie, vont amener l'élève à proposer le même argument pour conclure à la fermeture des opérations d'addition et de multiplication sur l'ensemble $K_{(\alpha,0)}$, sans jamais faire intervenir le fait que le deuxième élément de ces scalaires couples doit être 0. Ici il faut sans doute mettre la faute sur la question posée : en proposant une situation qui « marche », l'ensemble $K_{(\alpha,0)}$ muni des opérations de $K_{(\alpha,\beta)}$ étant effectivement un corps, l'élève ne dispose d'aucun moyen pour modifier la procédure qu'il a utilisée précédemment et il faut donc s'attendre à ce genre de solution. Une question qui serait beaucoup plus intéressante ici et qui permettrait d'éviter cette erreur de raisonnement serait de proposer à l'élève de comparer le comportement du sous-ensemble $K_{(\alpha,0)} = \{(\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ avec celui du sous-ensemble $K_{(\alpha,1)} = \{(\alpha, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ relativement aux opérations d'addition et de multiplication.

Le problème de la réutilisation des anciens schèmes apparaît une seconde fois dans cette question. La première partie du travail avait en effet permis d'établir une procédure permettant de déterminer que le couple $(1, 0)$ représentait l'élément neutre pour la multiplication dans l'ensemble $K_{(\alpha,\beta)}$ et que tout couple $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ possédait un inverse qui prenait la forme $\left(\dfrac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, \dfrac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)$. Plutôt que de prendre ces résultats comme point de départ et d'invoquer que le couple $(1, 0)$ fait également partie de l'ensemble $K_{(\alpha,0)}$, puis de remarquer que si on applique la forme générale des inverses au couple $(\alpha, 0)$ avec $\alpha \neq 0$ on obtient un couple de la forme $\left(\dfrac{1}{\alpha}, 0\right)$ qui est un élément de $K_{(\alpha,0)}$, la presque totalité des élèves préfère reprendre à zéro la procédure pour ainsi recalculer une seconde fois l'élément neutre puis les inverses.

La deuxième question va permettre d'établir que le corps $K_{(\alpha,0)}$ et le corps des réels ne sont que deux expressions du même objet. En guise de préambule, le questionnaire propose à l'élève la définition suivante d'un isomorphisme :

En d'autres mots, il s'agit de trouver une fonction $f : K_{(\alpha,0)} \to \mathbb{R}$ *inversible (i.e. dont la réciproque existe) telle que* :

1. $f\left((\alpha_1, 0) + (\alpha_2, 0)\right) = f\left((\alpha_1, 0)\right) + f\left((\alpha_2, 0)\right)$
2. $f\left((\alpha_1, 0)(\alpha_2, 0)\right) = f\left((\alpha_1, 0)\right) f\left((\alpha_2, 0)\right)$.

[2]Par « théorème » des sous-espaces vectoriels, on réfère ici à la proposition qui énonce que tout sous-ensemble d'un espace vectoriel est lui-même un espace vectoriel s'il est non vide, fermé pour l'addition vectorielle et fermé pour la multiplication par un scalaire.

[3]Bien que la notion de sous-espace vectoriel ne fasse pas partie du programme du cours d'algèbre linéaire au niveau collégial, plusieurs manuels utilisés pour ce cours introduisent cette notion.

Une fonction qui possède ces propriétés porte le joli nom d'« isomorphisme » entre les ensembles $K_{(\alpha,0)}$ et $\mathbb{R}$.

On comprendra ici que le questionnaire sait à qui il s'adresse et qu'il est capable de comprendre qu'une définition décontextualisée de la notion d'isomorphisme aurait posé à l'élève une difficulté insurmontable. On pose alors la question suivante :

Question 2

Définir un isomorphisme entre $K_{(\alpha,0)}$ et $\mathbb{R}$ permettant d'établir que les ensembles $K_{(\alpha,0)}$ et $\mathbb{R}$ munis de leurs opérations respectives se comportent de façon identique.

Ici encore les exigences de la question ne portent que sur le résultat souhaité. Les élèves ont déjà été confrontés au mot « définir » dans une question précédente, mais malgré cela un certain nombre d'entre eux, quoique dans une proportion plus faible que précédemment, tient encore à déduire la fonction demandée à partir des propriétés qu'elle doit satisfaire. Bien que cela soit évidemment possible en utilisant la deuxième propriété, le schème envisagé n'est pas de cet ordre et sans soutien du professeur cette approche n'est pas facilement accessible à l'élève. Cette question pose deux difficultés aux élèves. La première concerne le fait que ceux-ci n'ont jamais travaillé dans leurs cours de calcul avec autre chose que des fonctions dont le domaine et l'image étaient des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. La seconde difficulté que pose cette question à l'élève se trouve dans la simplicité de la fonction qu'il est possible d'exhiber pour satisfaire aux exigences, la plus simple étant évidemment définie par la règle de correspondance : $f((\alpha,0))=\alpha$. Ce qui semble embêter le plus l'élève, c'est l'absence de « calculs » dans cette fonction. Certains vont alors tenter de combler cette absence en proposant des fonctions de la forme $f((\alpha,0))=\alpha+0$ et même $f((\alpha,0))=\sqrt[3]{\alpha^3+0}$.

La question qui concerne l'existence de la fonction inverse est ici un prétexte pour revisiter cette notion. La notion de fonction inversible (ou réciproque) a été vue une première fois à la fin du niveau secondaire puis a été reprise dans les cours de calculs du niveau collégial lors de la présentation de la fonction logarithme et des fonctions trigonométriques inverses. Au secondaire, on présente une méthode permettant de trouver la fonction réciproque d'une autre dans le cas des fonctions rationnelles du premier degré. Au collégial, on essaie de caractériser la réciproque d'une fonction par l'opération de composition. Évidemment, pour la plupart des élèves, cette caractérisation ne fait plus partie des schèmes de pensée disponibles. Par contre le schème présenté au secondaire est encore accessible à l'élève mais malheureusement ne lui est pas utile ici. Le professeur doit donc intervenir lors des rencontres individuelles et suggérer à l'élève d'en discuter avec son manuel de calcul différentiel.

La troisième question amène l'élève à considérer la possibilité que le sous-ensemble $K_{0,\beta}=\{(0,\beta)\mid\beta\in\mathbb{R}\}$ soit également un corps.

Question 3

i) *Calculer le produit* $(0,1)^2$;

ii) *Déterminer si le sous-ensemble* $K_{(0,\beta)}$ *muni de l'addition et de la multiplication telles que définies sur* $K_{(\alpha,\beta)}$ *est un corps.*

À nouveau, le résultat de la première partie de cette question permet de répondre à la seconde. Bien que le schème de pensée associé à la fermeture d'une opération ait acquis une certaine solidité, celle-ci n'est toutefois pas suffisante pour permettre à l'élève d'exploiter le résultat de la question i). Presque tous les élèves vont montrer la non-fermeture de la multiplication en effectuant la multiplication des couples $(\alpha_1, 0)$ et $(\alpha_2, 0)$.

En proposant préalablement de noter les couples de la forme $(\alpha, 0)$ par α et le couple $(0,1)$ par c, comme la première lettre du mot compliqué, la question suivante va amener les élèves à utiliser une écriture sans couples pour les éléments du corps $K_{(\alpha,\beta)}$.

Question 4

Montrer que tout scalaire (α, β) *du corps* $K_{(\alpha,\beta)}$ *peut maintenant être noté par* $\alpha + \beta c$*, i.e.* $(\alpha, \beta) \triangleq \alpha + \beta c$.

Cette question illustre la difficulté que le symbolisme pose à l'élève. Depuis le début du travail, malgré que α et β ne représentent que deux nombres réels, α a toujours été le premier terme du couple et β le second. Cette apparence de différence dans la nature de ces deux réels a comme conséquence que la notation $(\alpha, 0) \triangleq \alpha$ proposée par le questionnaire pour les éléments du corps $K_{(\alpha,0)}$ sera mal généralisée dans le cas de β. Pour l'élève elle prendra alors la forme $\beta \triangleq (0, \beta)$. Il pourrait être intéressant ici d'utiliser une notation plus abstraite en écrivant $K_{(*,*)}$ pour $K_{(\alpha,\beta)}$.

La nouvelle notation va permettre à l'élève une nouvelle écriture du résultat de la question 3 i) sous une forme « plus audacieuse », comme le dit si bien Papillon à la page 298 :

$$c^2 = -1\,.$$

Pour terminer cette partie on propose à l'élève une écriture plus simple pour la multiplication.

Question 5

Sans utiliser la formulation en couples, effectuer les produits suivants :

i) $(3-4c)\left(\dfrac{3}{25} + \dfrac{4}{25}c\right)$;

ii) $(\alpha_1 + \beta_1 c)(\alpha_2 + \beta_2 c)$.

Et après avoir défini le conjugué d'un nombre on pose la question suivante :

Question 6

Toujours avec la nouvelle notation, montrer que pour tout scalaire du corps $K_{(\alpha,\beta)}$*, le résultat de la multiplication par son conjugué est un nombre réel positif.*

Les questions 5 i), 5 ii) et 6 sont essentiellement trois fois la même question. L'expression générale est le résultat de 5 ii), mais très peu d'élèves vont réinvestir le résultat de cette question pour les appliquer à la question 6 ou encore à la question 5 i) qui a le défaut de précéder la question 5 ii).

4. Le travail : troisième acte

Dans cette troisième partie, nous amenons l'élève à établir une formule de calcul pour le produit scalaire sur l'espace vectoriel $K^2_{(\alpha,\beta)}$ à partir des propriétés axiomatiques du produit scalaire. Les élèves ont déjà pu définir une base de l'espace vectoriel $K^2_{(\alpha,\beta)}$ lors de la première partie de ce travail. La partie magistrale du cours a permis une présentation axiomatique des formules de calcul du déterminant 2×2, du déterminant 3×3 et du produit vectoriel. Les élèves ont également été en contact avec les trois « définitions » du produit scalaire que propose Papillon :

- géométrique :
  $\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$, où θ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$;
- algébrique :
  $\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$, où $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sont exprimés relativement à une base orthonormée ;
- axiomatique :
  une fonction qui associe à tout couple $\vec{u}, \vec{v}$ de vecteurs un réel noté $\vec{u} \bullet \vec{v}$ tel que :
  $PS1$ $\quad \vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$
  $PS2$ $\quad (k\vec{u}) \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet (k\vec{v}) = k(\vec{u} \bullet \vec{v})$
  $PS3$ $\quad \vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$
  $PS4$ $\quad \vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

Chacune de ces « définitions » du produit scalaire peut être considérée comme une généralisation de la précédente ; la première n'a de sens que pour $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, le seconde est limitée à $\mathbb{R}^n$ et la troisième n'impose aucune restriction sur l'espace considéré. On demande alors à l'élève de tenter de poursuivre cette généralisation afin d'obtenir une formule de calcul dans le cas où l'on remplacerait le mot « réel » par le mot « scalaire » dans la définition axiomatique du produit scalaire.

Les trois premières questions de cette partie examinent la possibilité d'utiliser pour l'espace vectoriel $K^2_{(\alpha,\beta)}$ la formule de calcul du produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ sur $K^2_{(\alpha,\beta)}$. Après avoir demandé un exemple de généralisation (question 1) et avoir montré que $\mathbb{R}^2 \subset K^2_{(\alpha,\beta)}$ (question 2), on propose la réflexion suivante :

La vieille formule algébrique du calcul du produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ est-elle encore applicable sur $K^2_{(\alpha,\beta)}$? Si oui, BINGO !, le troisième travail est terminé.

Question 3

a) *En considérant que les vecteurs de $K^2_{(\alpha,\beta)}$ sont donnés relativement à une base orthonormée de cet espace, effectuer les produits scalaires suivants à l'aide de la formule de la page 54 de Papillon :*

i) $(1, c) \bullet (1, c)$;

ii) $(1 + c, 3) \bullet (2 - 3c, -5 + 2c)$;

iii) $(1 - c, 2 + 2c) \bullet (1 - c, 2 + 2c)$;

iv) $(5c, 0) \bullet (5c, 0)$;

b) *Commenter les résultats obtenus en a)* ;

c) *Le troisième travail est-il terminé* ?

La réponse à la question c) est évidemment « non » puisque le travail comporte encore cinq autres questions, mais sans cette demande, les résultats de a) ne sont pas suffisamment troublants pour amener l'élève à considérer que l'application de la formule de calcul du produit scalaire de $\mathbb{R}^2$ contrevient aux axiomes du produit scalaire lorsque appliquée à l'espace $K^2_{(\alpha,\beta)}$. Quant à la question a) ce n'est qu'une application de la notation pour les scalaires « couples » de $K_{(\alpha,\beta)}$ obtenue dans la deuxième partie de ce travail et l'élève obtient relativement aisément que :

i) $(1, c) \bullet (1, c) = 0$;

ii) $(1 + c, 3) \bullet (2 - 3c, -5 + 2c) = -10 + 5c$;

iii) $(1 - c, 2 + 2c) \bullet (1 - c, 2 + 2c) = 2c$;

iv) $(5c, 0) \bullet (5c, 0) = -25$.

La question b) pose beaucoup plus de difficultés : l'élève sait qu'on lui demande un argument démontrant qu'au moins une des propriétés du produit scalaire est violée, mais cette demande n'est pas facile à satisfaire. Dans un premier temps, l'élève croit voir un problème en i) et iv) : le résultat de ces deux produits scalaires sur le corps $K_{(\alpha,\beta)}$ est un nombre réel. La difficulté à mettre le doigt sur le problème s'explique sans doute par le fait que la propriété PS4, celle qui dans ce cas est violée, est la plus obscure pour l'élève, en particulier parce qu'elle n'a pas d'équivalent comme les trois autres propriétés (commutativité, pseudo-associativité et distributivité) pour d'autres opérations. Cette difficulté ne peut être que difficilement surmontée sans l'insistance du professeur à rappeler le lien qui existe entre produit scalaire, norme et longueur d'un vecteur. Comme plusieurs problèmes du livre de Papillon font appel à ce lien, cette insistance peut prendre la forme de la question : « Et que pense le manuel de ça ? ».

Le canevas de travail va trouver un prétexte dans cette incohérence pour proposer une nouvelle définition axiomatique du produit scalaire [4].

Définition

Étant donné un espace vectoriel défini sur le corps $K_{(\alpha,\beta)}$, un produit scalaire est une fonction qui associe à tout couple de vecteurs de cet espace vectoriel un et un seul scalaire (ici un élément de $K_{(\alpha,\beta)}$) et respecte les quatre propriétés suivantes :

[4]Dans un monde idéal c'est la propriété PS4 qui aurait été modifiée, mais comme celle-ci fait le lien entre les scalaires et les réels, elle doit évidemment rester invariante.

$PS1^*$ $\quad \vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}\,;$
$PS2^*$ $\quad (k\vec{u}) \bullet \vec{v} = k(\vec{u} \bullet \vec{v})\,;$
$PS3^*$ $\quad \vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}\,;$
$PS4^*$ $\quad \vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\|^2\,.$

Les questions suivantes vont d'abord amener l'élève à vérifier que la propriété PS1* reste cohérente avec la propriété PS1 lorsque le corps considéré est $\mathbb{R}$ (question 4). Par la suite on propose deux résultats qui seront nécessaires au développement de la formule de calcul du produit scalaire à partir des propriétés axiomatiques de cette opération sur le corps $K_{(\alpha,\beta)}$ (questions 5 et 6). En particulier la question 6 va examiner les conséquences que peut avoir l'anti-commutativité de la propriété PS1* sur les propriétés PS2* et PS3*.

Question 6

a) *La propriété PS2* indique que* $(k\vec{u}) \bullet \vec{v} = k(\vec{u} \bullet \vec{v})$*. Est-il vrai que* $\vec{u} \bullet (k\vec{v}) = k(\vec{u} \bullet \vec{v})$ *aussi ?*

b) *La propriété PS3* indique que* $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$*. Est-il vrai que* $(\vec{v} + \vec{w}) \bullet \vec{u} = \vec{v} \bullet \vec{u} + \vec{w} \bullet \vec{u}$ *aussi ?*

L'élève semble avoir de la difficulté à accepter qu'une seule des deux propriétés soit affectée par la nouvelle propriété PS1* (seule PS2* est affectée). Ayant obtenu que $\vec{u} \bullet (k\vec{v}) = \bar{k}(\vec{u} \bullet \vec{v})$, il se croit tenu de placer à nouveau un conjugué dans PS3*.

Après avoir rappelé la définition d'une base orthonormée, la septième question demande à l'élève d'obtenir la nouvelle formule de calcul.

Question 7

a) *En admettant l'existence d'une base orthonormée* $B = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$ *de* $K^2_{(\alpha,\beta)}$*, établir une formule de calcul pour le produit scalaire de deux vecteurs* $\vec{u} = (k_1, k_2)$ *et* $\vec{v} = (l_1, l_2)$ *de* $K^2_{(\alpha,\beta)}$ *exprimés relativement à cette base ;*

b) *Vérifier que dans le cas particulier où les composantes* k_1, k_2, l_1 *et* l_2 *des vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont des nombres réels, alors la formule obtenue en a) correspond à la définition du produit scalaire sur* $\mathbb{R}^2$.

Cette question va permettre à l'élève de faire le lien entre les connaissances qu'il possède déjà et les nouvelles connaissances amenées par le questionnaire. Ce lien lui sera offert par le troisième membre de l'équipe. Le livre de Papillon présente le développement de la formule de calcul pour le déterminant 2×2 , une présentation qui remonte à la deuxième partie du cours magistral. En invoquant les propriétés appropriées, il prend la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
\Delta\langle(a,b)(c,d)\rangle &= \Delta\langle a\vec{i}+b\vec{j}, c\vec{i}+d\vec{j}\rangle \\
&= \Delta\langle a\vec{i}, c\vec{i}+d\vec{j}\rangle + \Delta\langle b\vec{j}, c\vec{i}+d\vec{j}\rangle \\
&= \Delta\langle a\vec{i}, c\vec{i}\rangle + \Delta\langle a\vec{i}, d\vec{j}\rangle + \Delta\langle b\vec{j}, c\vec{i}\rangle + \Delta\langle b\vec{j}, d\vec{j}\rangle \\
&= ac\Delta\langle\vec{i},\vec{i}\rangle + ad\Delta\langle\vec{i},\vec{j}\rangle + bc\Delta\langle\vec{j},\vec{i}\rangle + bd\Delta\langle\vec{j},\vec{j}\rangle \\
&= 0 + ad\Delta\langle\vec{i},\vec{j}\rangle + bc\Delta\langle\vec{j},\vec{i}\rangle + 0 \\
&= ad\Delta\langle\vec{i},\vec{j}\rangle - bc\Delta\langle\vec{i},\vec{j}\rangle \\
&= ad - bc\,.
\end{aligned}
$$

En faisant parler le manuel, l'élève pourra obtenir un développement presque identique pour la formule du produit scalaire. En invoquant les propriétés appropriées, il prend la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
(k_1,k_2)\bullet(l_1,l_2) &= (k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2)\bullet(l_1\vec{e}_1 + l_2\vec{e}_2) \\
&= (k_1\vec{e}_1)\bullet(l_1\vec{e}_1 + l_2\vec{e}_2) + (k_2\vec{e}_2)\bullet(l_1\vec{e}_1 + l_2\vec{e}_2) \\
&= (k_1\vec{e}_1)\bullet(l_1\vec{e}_1) + (k_1\vec{e}_1)\bullet(l_2\vec{e}_2) + (k_2\vec{e}_2)\bullet(l_1\vec{e}_1) + (k_2\vec{e}_2)\bullet(l_2\vec{e}_2) \\
&= (k_1\bar{l}_1)(\vec{e}_1\bullet\vec{e}_1) + (k_1\bar{l}_2)(\vec{e}_1\bullet\vec{e}_2) + (k_2\bar{l}_1)(\vec{e}_2\bullet\vec{e}_1) + (k_2\bar{l}_2)(\vec{e}_2\bullet\vec{e}_2) \\
&= (k_1\bar{l}_1)(\vec{e}_1\bullet\vec{e}_1) + 0 + 0 + (k_2\bar{l}_2)(\vec{e}_2\bullet\vec{e}_2) \\
&= k_1\bar{l}_1 + k_2\bar{l}_2\,.
\end{aligned}
$$

La deuxième partie de la question permet de confirmer que cette nouvelle formule pour le produit scalaire est bien une généralisation de celle sur $\mathbb{R}^2$.

Pour terminer nous proposons à l'élève de revenir au point où les problèmes sont apparus dans cette troisième partie en ramenant une question précédente.

Question 8

a) *En considérant que les vecteurs de* $K^2_{(\alpha,\beta)}$ *sont donnés relativement à une base orthonormée de cet espace, effectuer les produits scalaires suivants à l'aide de la formule établie à la question 7 :*

   i) $(1,c)\bullet(1,c)$,

   ii) $(1+c,3)\bullet(2-3c,-5+2c)$,

   iii) $(1-c,2+2c)\bullet(1-c,2+2c)$,

   iv) $(5c,0)\bullet(5c,0)$;

b) *Commenter les résultats obtenus en a)* ;

c) *Le troisième travail est-il terminé* ?

Cette fois-ci, au grand soulagement de l'élève, la réponse à la question c) est oui.

CONCLUSION

Nous avons essayé dans ce travail de clarifier les rôles des différents acteurs qui interviennent lorsque l'on place l'élève dans une situation d'apprentissage par problèmes : le questionnaire, le professeur, le manuel et l'élève. Tout en étant solidaires les uns des autres, ces acteurs doivent apprendre à agir avec un minimum d'autonomie. Le professeur en particulier doit savoir montrer une certaine distance face au questionnaire. On pourrait même parfois le voir tenter de s'opposer à la volonté de ce questionnaire. Le professeur a également comme rôle de s'assurer que le manuel acquière un statut d'intervenant à part entière : il ne s'agit pas pour l'élève de voir le manuel uniquement comme un personnage qui ne sait que poser des questions mais de le voir aussi comme un personnage à qui on peut apprendre à nous aider à répondre à celles du questionnaire. Nous pensons que c'est dans l'apprentissage du rôle que le manuel peut jouer, que l'élève saura profiter le plus des mises en situation « par problèmes ».

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier très chaleureusement Madame Marie-Jane Haguel, professeure à la retraite du Cégep de Sherbrooke et Madame Sylvie Savage, professeure au Cégep de Sherbrooke, pour leur collaboration, leur soutien mais surtout pour le plaisir que j'ai eu à travailler avec elles sur ce projet.

RÉFÉRENCES

Vincent Papillon, *Vecteurs, matrices et nombres complexes*, Modulo Éditeur, Montréal 1993.