L'objet E_8

Bernard Courteau
Université de Sherbrooke

À l'émission *Découverte* de la télévision de Radio-Canada diffusée le 19 mars dernier, on faisait état de l'objet E_8 qui a donné lieu au plus formidable calcul jamais réalisé en mathématiques. L'objet E_8 n'est sans doute pas aussi important ni aussi complexe que le génome humain, mais il reste que les résultats de ce calcul occupent 60 gigaoctets de mémoire, comparé à un gigaoctet pour le génome.

Dans le cadre de son projet d'*Atlas des groupes de Lie et de leurs représentations*, une équipe d'une vingtaine de mathématiciens américains et européens a entrepris le calcul, entre autres, de toutes les représentations irréductibles du groupe de Lie exceptionnel E_8.

Voici ce qu'en dit Jeffrey Adams, le responsable du projet :

> *Il s'agit de recherche fondamentale qui aura beaucoup de conséquences, la plupart incomprises actuellement. De la même façon que le génome humain ne nous donnera pas instantanément de remède miracle, nos résultats constituent un outil de base que les scientifiques vont utiliser pour faire avancer les recherches dans d'autres domaines.*

Le calcul a exigé des innovations en matière de programmation informatique, ce qui fait dire à Peter Sarnak, président de l'Institut américain de mathématiques :

> *Cette percée est importante non seulement pour faire avancer les connaissances mathématiques de base, mais aussi pour faciliter les calculs par ordinateur permettant de résoudre des problèmes complexes.*

Certains commentateurs enthousiastes prédisent un avenir très important de ces résultats en physique.

> *Le travail qui a été accompli est analogue à la détermination de la structure d'un dernier élément du tableau de Mendeleïev ainsi que de tous ses isotopes. La détermination précise de la structure de E_8 peut éventuellement être aussi importante pour la physique que l'avait été pour la chimie la compréhension complète de la structure du carbone.*

Ces commentateurs soulignent que la théorie des supercordes hétérotiques est fondée sur le groupe E_8*E_8 plutôt que sur le groupe classique $SO(32)$ (site de Futura-sciences).

Le texte qui suit ne vise qu'à donner une certaine idée du contexte mathématique dans lequel prend place l'objet E_8.

C'est le mathématicien norvégien Sophus Lie qui a créé en 1874 la théorie des groupes continus de transformations, appelés maintenant *groupes de Lie*, en vue de faire pour les équations différentielles une théorie analogue à la théorie de Galois pour les équations algébriques, dans laquelle les groupes discrets jouaient un rôle prépondérant. Mais la théorie a eu aussi dès le départ une très forte saveur géométrique, surtout qu'à la même époque, dans son fameux programme d'Erlangen, Felix Klein en 1872 conçoit une géométrie comme l'ensemble des propriétés des figures qui restent invariantes sous un groupe donné de transformations. Le groupe en question définit alors les *symétries* de la géométrie correspondante. En fait, ce que l'on définit de cette façon, ce sont les espaces homogènes de groupe donné. Ceux-ci fournissent des modèles locaux de géométries plus générales, courbées, obtenues par une sorte de recollement de morceaux.

Une transformation dans un groupe de Lie dépend d'un certain nombre fixé k de paramètres réels ou complexes qui peuvent servir de coordonnées dans le groupe et le doter ainsi d'une structure de variété analytique de dimension k. Pour étudier le groupe, Lie utilise de façon essentielle cette structure en introduisant la *méthode infinitésimale* qui revient à approximer le groupe au voisinage de l'identité à l'aide de son espace tangent en ce point. Cet espace tangent est un espace vectoriel de même dimension que le groupe et il possède une structure supplémentaire, une multiplication $[X, Y]$, appelée crochet de Lie, qui est anticommutative et satisfait à l'identité de Jacobi $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$, une identité mesurant en quelque sorte son écart à l'associativité. On obtient ainsi l'*algèbre de Lie* du groupe considéré.

Lie montre alors que, sous de bonnes hypothèses, l'algèbre de Lie permet de reconstruire le groupe, de sorte que la classification des groupes de Lie revient à la classification de leurs algèbres de Lie. Puis il définit les *groupes simples* qui sont des objets de base permettant, sous les hypothèses qui conviennent, de reconstruire des groupes généraux, et en 1885 il met en évidence quatre classes infinies de groupes simples qu'il note A_n, B_n, C_n, D_n. Ce sont les *groupes classiques* que l'on obtient en considérant les transformations linéaires d'espaces vectoriels réels ou complexes qui laissent invariantes diverses formes quadratiques : $A_n = SU(n)$, $B_n = SO(n+1)$, $C_n = Sp(2n)$, $D_n = SO(2n)$. Ces groupes sont de dimensions respectives n^2+n, $2n^2$, $2n^2$ et $2n(n-1)$. Il arrive que l'on comprenne mieux les groupes C_n si on utilise le corps non commutatif des *quaternions* découvert par Hamilton en 1845.

La classification des groupes de Lie a été complétée par W. Killing de 1888 à 1890. Il ajoute aux quatre classes de Lie cinq groupes exceptionnels qu'il note E_6, E_7, E_8, F_4 et G_2 où l'indice désigne le *rang* du groupe (égal à la dimension d'une sous-algèbre commutative maximale de son algèbre de Lie). Les dimensions de ces groupes exceptionnels sont respectivement *78, 133, 248, 52* et *14*. En 1894, dans sa thèse, Élie Cartan retrouve les résultats de Killing par des méthodes nouvelles qui ont guidé les recherches pendant tout le XX^e siècle.

L'objet E_8 est donc, au moins par sa dimension *248*, l'objet le plus remarquable des cinq groupes de Killing. Comme tous les groupes, ces cinq groupes définissent des géométries qui ont été étudiées par H. Freudenthal et J. Tits. Elles sont reliées aux *octaves* (ou *octanions*), une algèbre de division non commutative et non associative de dimension 8 sur le corps des réels, découverte par Graves, un ami de Hamilton, peu de temps après la découverte des quaternions. Il est remarquable qu'il n'y ait que quatre algèbres de division de dimensions réelles finies et contenant les réels dans leurs centres (Hurwitz 1878) : les réels, les complexes, les quaternions et les octaves de dimensions respectives *1,* *2, 4* et *8*.

Avec E_8 et les octaves, nous sommes vraiment dans un monde mathématique un peu exotique et il n'est peut-être pas si surprenant que les physiciens soient attirés par ces objets mathématiques pour décrire le monde physique dans lequel nous vivons, surtout s'ils croient que ce monde est unique, exceptionnel, qu'il n'y en a pas d'autres possibles. De fait, comme on le disait plus haut, E_8 intervient dans les théories physiques récentes basées sur la théorie des hypercordes.

L'objet E_8 est aussi relié au remplissage le plus dense de l'espace réel à *8* dimensions par des boules rigides de même grosseur. Sur le blogue *The n-Category Café*, John Baez donne dans ce contexte la plus courte description de E_8 par la recette qui suit : prenez des boules rigides de même grosseur dans l'espace réel R^8 à *8* dimensions et trouvez la façon la plus dense de les placer dans cet espace. Les centres de ces boules forment alors une lattice L, c'est-à-dire un sous-ensemble discret de R^8 fermé pour l'addition et la soustraction. Ensuite formez le tore $T = R^8/L$ avec sa métrique induite de l'espace ambiant R^8. Or il arrive que tout groupe de Lie compact possède un tore maximal et le plus beau de l'affaire est que si vous avez en main un tore muni d'une métrique, vous pouvez retrouver l'unique groupe de Lie dont c'est le tore maximal, du moins, dit Baez avec humour, si vous avez pris un cours gradué sur le sujet ! Ceci étant dit, l'objet E_8 est le groupe de Lie compact dont $T = R^8/L$ est le tore maximal !

Le point le plus difficile est de trouver la lattice du remplissage le plus dense de R^8 par des boules de même grosseur. Voici le résultat : la lattice L est formée de tous les vecteurs $(x_1, \ldots, x_8)$ tels que : 1) les x_i sont des entiers ou des demi-entiers, 2) la somme $x_1 + \ldots + x_8$ est paire. Puis Baez donne un magnifique graphe montrant les centres des 240 boules touchant une boule donnée, chacun étant relié aux plus proches voisins.

Enfin, Baez donne une idée des polynômes de Kazhdan-Lusztig-Vogan qui fournissent les représentations irréductibles de E_8, c'est-à-dire les diverses façons qu'a l'objet E_8 de se comporter comme groupe de transformations de certains espaces vectoriels bien choisis. Ce sont ces polynômes à coefficients entiers qui ont été calculés.

On trouvera de l'information plus technique sur le site de l'*American Institute of Mathematics* et en particulier dans le diaporama de David Vogan intitulé *The Character Table for E_8 or how we wrote down a 453 060 X 453 060 matrix and found happiness.*

RÉFÉRENCES

1. http ://www.aimath.org/E8/
2. http ://www.lemonde.fr : Une vingtaine de chercheurs percent l'un des plus grands secrets, 19 mars 2007.
3. http ://www.futura-sciences.com/news-groupe-lie-e8-cle-theorie-supercordes_10562.php.
4. http ://fr.wikipedia.org/wiki/E8/
5. http ://fr.wikipedia.org/wiki/Système_de_racines
6. J.C.Baez, « The octonions », *Bull.Amer.Math.Soc.* 39 (2002), 145-205.

7. J.C.Baez, recension du livre *On quaternions and octanions : their geometry, arithmetic, and symetry*, par J.H.Conway et D.A. Smith, *Bull.Amer.Math.Soc.* 42 (2005), 229-243.
8. http ://golem.ph.utexas.edu/category/2007/03/news_about_e8.html

ANNEXE : Systèmes de racines et Diagrammes de Dynkin

La classification des algèbres de Lie simples utilise des systèmes particuliers de générateurs du complémentaire d'une sous-algèbre commutative maximale. Cela donne lieu à des objets géométriques et combinatoires caractéristiques : les *systèmes de racines* et les *diagrammes de Dynkin.*

Un *système de racines de rang r* est une partie Φ d'un espace vectoriel réel V muni du produit scalaire usuel noté (,) telle que

1. Φ engendre V ;
2. Si $\alpha \in \Phi$, alors les seuls multiples scalaires de α dans Φ sont α et $-\alpha$;
3. Pour tout $\alpha \in \Phi$, Φ est stable pour la réflexion σ_α relativement à l'hyperplan perpendiculaire à α ;
4. Si $\beta \in \Phi$, $\sigma_\alpha(\beta) - \beta$ est un multiple *entier* de α ;
   Puisque $\sigma_\alpha(\beta) - \beta = 2$ fois la projection orthogonale de β sur $\alpha = 2\dfrac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$.
   Cela revient à dire que $\dfrac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$ est un entier ou un demi-entier.

Le groupe engendré par les σ_α est appelé *groupe de Weyl* du système de racines Φ.

Un *système fondamental de racines de rang r* est une partie Δ de Φ telle que tout $\alpha \in \Phi$ s'écrit d'une façon unique comme combinaison linéaire d'éléments de Δ à coefficients entiers tous de même signe. Les éléments de Δ sont appelés *racines simples.*

Ces contraintes sont très fortes et imposent que les seuls angles possibles entre deux racines simples sont 90°, 120°, 135° et 150°, et qu'il ne peut y avoir que deux longueurs de racines simples possibles.

Le *diagramme de Dynkin* de Δ est alors un graphe défini comme suit.

Sommets : $\alpha^1, \dots, \alpha^r$: éléments de Δ.

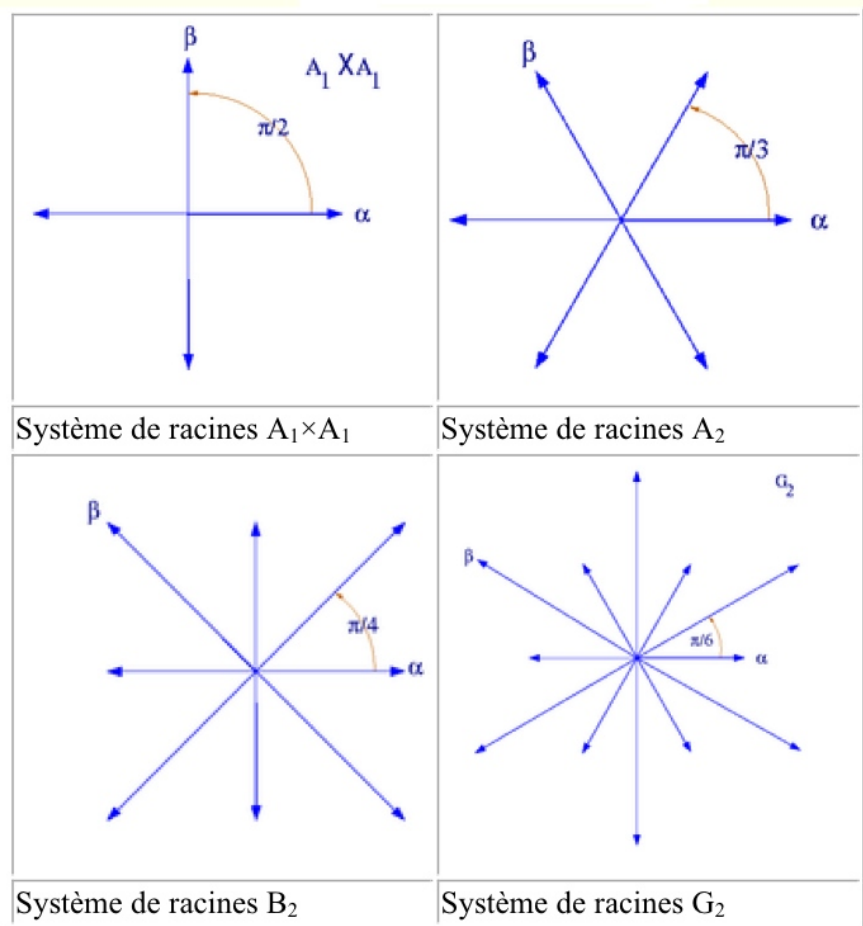
Arêtes :

$\alpha^i \;\text{———}\; \alpha^j$ si l'angle $(\alpha^i, \alpha^j) = 120°$
$\alpha^i \Longrightarrow \alpha^j$ si l'angle $(\alpha^i, \alpha^j) = 135°$ et si α^i est plus long que α^j
$\alpha^i \Rrightarrow \alpha^j$ si l'angle $(\alpha^i, \alpha^j) = 150°$ et si α^i est plus long que α^j
$\alpha^i \qquad \alpha^j$ si l'angle $(\alpha^i, \alpha^j) = 90°$.

Le seul système de racines de rang 1 est $\Phi = \{\alpha, -\alpha\}$. La seule racine simple est α et le diagramme de Dynkin est le graphe à un seul sommet.

Il y a 4 systèmes de racines de rang 2.

Systèmes de racines de rang 2



Système de racines $A_1 \times A_1$ | Système de racines A_2

Système de racines B_2 | Système de racines G_2

À toute algèbre de Lie simple sont associés un système de racines et un diagramme de Dynkin. Réciproquement, à tout diagramme de Dynkin connexe à r sommets est associé un système de racines Φ qui permet de construire un système de générateurs $H_1, \ldots, H_r, E_\alpha$ avec $\alpha \in \Phi$ d'une algèbre de Lie simple définie par les relations

$$
\begin{aligned}
&[H_i, H_j] = 0 && [H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha \text{ avec } \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_r)\\
&[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} && \text{si } \alpha + \beta \in \Phi\\
&[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \sum_i \alpha_i H_i.
\end{aligned}
$$

Les générateurs H_i , appelés générateurs de Cartan, engendrent une sous-algèbre commutative maximale (de dimension r) de l'algèbre de Lie ainsi construite.

Dans le cas de l'objet E_8 , le système de racines est l'ensemble Φ des vecteurs $\alpha \in R^8$ de longueur $\sqrt{2}$ tels que les composantes de 2α sont des entiers tous pairs ou tous impairs dont la somme est paire.

Il y a 128 racines dont les 8 composantes sont $\pm 1/2$ (par exemple $(1/2, -1/2, -1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$) et 112 racines dont les deux composantes non-nulles sont ± 1 (par exemple $(1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$). Cela fait $128 + 112 = 240$ racines qui fournissent les 240 générateurs E_α de l'algèbre de Lie E_8. Si on ajoute les 8 générateurs de Cartan $H_1, \ldots, H_8$, qui engendrent une sous-algèbre commutative maximale, on obtient que la dimension de E_8 est 248.

Il est remarquable que la classification des groupes de Lie ait été complétée dès la fin du 19e siècle, alors que celle des groupes discrets ne l'ait été qu'un siècle plus tard. La raison se trouve sans doute dans le fait que les groupes de Lie permettent l'utilisation de la méthode infinitésimale qui ramène la classification des groupes de Lie à celle de leurs algèbres de Lie. La classification de Killing-Cartan et les graphes qui lui sont associés, par leur simplicité et leur profondeur, font partie des plus beaux résultats de toutes les mathématiques et apparaissent sans doute dans le grand livre de Erdös.

Classification de Killing-Cartan des algèbres de Lie simples à l'aide de leurs diagrammes de Dynkin