Concours de l'Association Mathématique du Québec 2007

Ordre collégial

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours ; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.
Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

Note : *L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

QUESTION 1 – Et Hop ! sans calculatrice !

En partant du fait que $3,3025 < \log_{10} 2007 < 3,3026$, déterminer le premier chiffre à gauche dans l'écriture décimale de 2007^{1000}.

Esquisse de solution :

Soit $a = 2007^{1000}$. Alors $\log_{10} a = 1000 \log_{10} 2007$. Ainsi $3302,5 < \log_{10} a < 3302,6$.
Donc $10^{3302,5} < a < 10^{3302,6}$.

C'est-à-dire, $10^{0,5} \times 10^{3302} < a < 10^{0,6} \times 10^{3302}$.

Mais $3 < 10^{0,5} = \sqrt{10}$ et $10^{0,6} = 10^{\frac{3}{5}} < 4$ car $10^3 < 4^5$.

On en déduit que $3 \times 10^{3302} < a < 4 \times 10^{3302}$. Le premier chiffre, à gauche, de 2007^{1000} est donc le chiffre 3.

QUESTION 2 – Toujours irréductible !

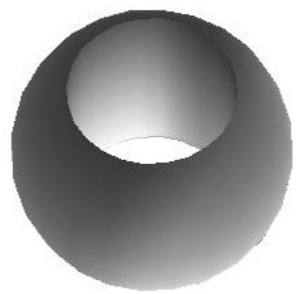
Montrer que la fraction $\dfrac{35n+7}{21n+4}$ est irréductible, quel que soit l'entier n. En d'autres termes, $35n+7$ et $21n+4$ n'ont pas de diviseur commun $d > 1$.

Esquisse de solution :

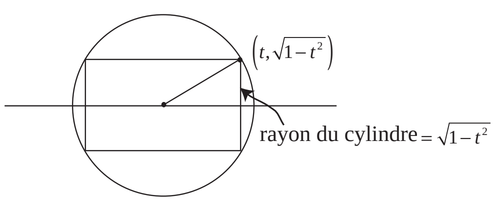
Si d divise $35n+7$ et $21n+4$, alors d divise $(35n+7)-(21n+4) = 14n+3$. Comme d divise $(21n+4)$ et $(14n+3)$, il divise ainsi $(21n+4)-(14n+3) = 7n+1$. Il divise aussi $(14n+3)-(7n+1) = 7n+2$. Finalement, d divise $7n+2$ et $7n+1$ et donc d divise $(7n+2)-(7n+1) = 1$. Le seul diviseur commun $d \geq 1$ de $35n+7$ et $21n+4$ est donc $d = 1$.

QUESTION 3 – Le vilebrequin et la boule de bois

À l'aide d'un vilebrequin, un menuisier perce un trou qui traverse une boule de bois le long d'un diamètre de sorte que le poids de la boule soit réduit de moitié. Sachant que le rayon de la boule est de 1 décimètre, déterminer le rayon du trou.



Esquisse de solution :



En plaçant l'axe du trou le long de l'axe des x, on obtient sucessivement :

$$\begin{aligned} \text{Volume du cylindre} &= 2t \cdot \pi(\sqrt{1-t^2})^2 \\ &= 2\pi t(1-t^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Volume des 2 calottes} &= 2\pi \int_t^1 (\sqrt{1-x^2})^2 dx \\
&= 2\pi \int_t^1 (1-x^2)dx = 2\pi \left[x - \left(\frac{1}{3}x^3 \right) \right] \Big|_t^1 \\
&= 2\pi \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) - \left(t - \frac{1}{3}t^3 \right) \right] \\
&= 2\pi \left[\frac{2}{3} - t + \frac{1}{3}t^3 \right].
\end{aligned}$$

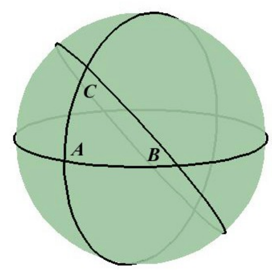
$$\begin{aligned}
\text{Volume du trou} &= 2\pi t(1-t^2) + 2\pi \left[\frac{2}{3} - t + \frac{1}{3}t^3 \right] \\
&= 2\pi \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}t^3 \right) = \frac{4\pi}{3}(1-t^3).
\end{aligned}$$

$$\text{Volume de la boule} = \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{4}{3}\pi.$$

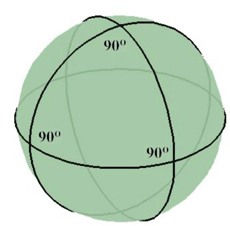
Il faut donc $\frac{4}{3}\pi(1-t^3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi$. Ainsi $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

QUESTION 4 – Les plateformes océaniques

Un groupe de chercheurs en océanographie possède trois plateformes A, B, et C, sur l'océan Pacifique, contenant chacune un laboratoire. Leurs recherches sont limitées à la portion de l'océan comprise dans le triangle sphérique ABC.
Sachant que $\angle A = 90\ ^\circ$, $\angle B = 45\ ^\circ$, $\angle C = 60\ ^\circ$, déterminer l'aire totale du triangle sphérique ABC.



Note : Contrairement au cas des triangles plans, dans un triangle sphérique, la somme des angles n'est pas égale à 180 degrés. Elle peut varier en étant toujours plus grande que 180 degrés, comme l'illustre la figure suivante où les trois angles sont de 90 degrés chacun et leur somme est de 270 degrés > 180 degrés.



Esquisse de solution :

L'aire d'un croissant entre deux demi grands cercles est proportionnelle à l'angle entre les deux demi grands cercles.

Lorsque l'angle est de 90 degrés = 360/4 degrés, l'aire vaut 1/4 de l'aire de la Terre.

Lorsque l'angle est de 45 degrés = 360/8 degrés, l'aire vaut 1/8 de l'aire de la Terre.

Lorsque l'angle est de 60 degrés = 360/6 degrés, l'aire vaut 1/6 de l'aire de la Terre.

En faisant la somme des 6 croissants déterminés par les points A, B, et C, on trouve que

$$\begin{aligned}&2\cdot(\text{aire croissant en } A)+2\cdot(\text{aire croissant en } B)+2\cdot(\text{aire croissant en } C)\\&=\text{aire de la Terre}+4\cdot(\text{aire du triangle } ABC).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}&2\cdot(\text{aire de la Terre})/4+2\cdot(\text{aire de la Terre})/8+2\cdot(\text{aire de la Terre})/6\\&=\text{aire de la Terre}+4\cdot(\text{aire du triangle } ABC).\end{aligned}$$

Ainsi, aire du triangle $ABC = (1/4)\cdot[(1/2+1/4+1/3)-1]\cdot$(aire de la Terre) = $(1/48)\cdot$(aire de la Terre).

QUESTION 5 – Le nécessaire zéro

Soient a, b, c trois nombres réels. Montrer que si les hypothèses suivantes sont satisfaites

$$a^3+b^3+c^3+abc=0,\ \ a+b\neq 0,\ \ b+c\neq 0,\ \ c+a\neq 0,$$

alors on a nécessairement

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0.$$

Esquisse de solution :

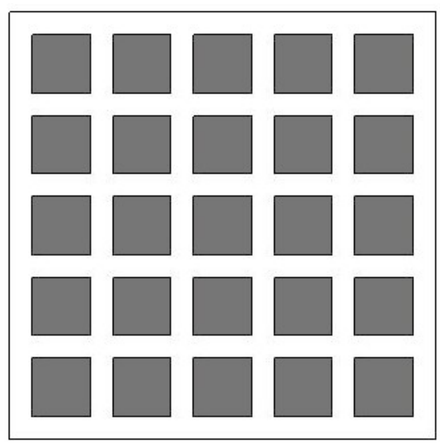
On a sucessivement,

$$
\begin{aligned}
&\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\\
&\quad= \frac{a^2(c+a)(a+b)+b^2(b+c)(a+b)+c^2(b+c)(c+a)}{(b+c)(c+a)(a+b)}\\
&\quad= \frac{(a^4+a^3b+a^3c+a^2bc)+(b^4+b^3a+b^3c+b^2ac)+(c^4+c^3a+c^3b+c^2ab)}{(b+c)(c+a)(a+b)}\\
&\quad= \frac{(a^4+ab^3+ac^3+a^2bc)+(b^4+ba^3+bc^3+b^2ac)+(c^4+ca^3+cb^3+c^2ab)}{(b+c)(c+a)(a+b)}\\
&\quad= \frac{a(a^3+b^3+c^3+abc)+b(b^3+a^3+c^3+bac)+c(c^3+a^3+b^3+cab)}{(b+c)(c+a)(a+b)}\\
&\quad= \frac{a\cdot 0+b\cdot 0+c\cdot 0}{(b+c)(c+a)(a+b)}\\
&\quad= 0.
\end{aligned}
$$

QUESTION 6 – La pièce de monnaie lancée sur la table

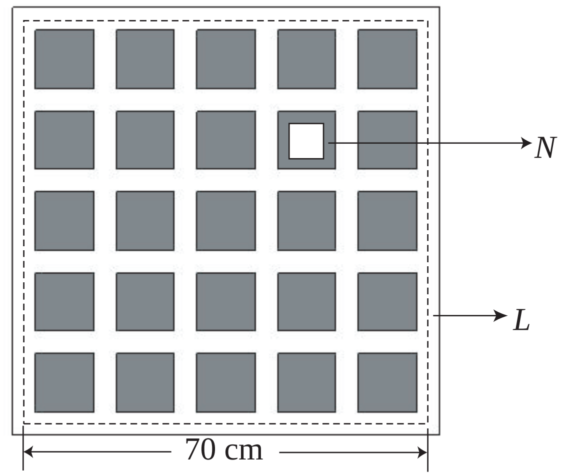
Un jeu consiste à lancer une pièce de monnaie circulaire de 2 cm de rayon, sur une table carrée. La surface de cette table contient 25 carrés noirs ayant 10 cm de côté chacun et qui sont séparés les uns des autres (et du bord de la table) par des bandes blanches ayant 4 cm de largeur (voir figure). Un lancer est dit « légal » si la pièce de monnaie tombe à plat sur la table sans déborder de la table. Un lancer est dit « gagnant » si la pièce de monnaie atterrit sur un carré noir sans déborder de ce carré.
Quelle est la probabilité qu'un lancer légal soit un lancer gagnant ?

Note : On suppose que les lancers légaux sont équiprobables.



Esquisse de solution :

La table est un carré de $6 \times 4 + 5 \times 10 = 74$ cm de côté. Soit C le centre de la pièce de monnaie. Un lancer est légal si C tombe dans le carré pointillé L de $74 - 2 \times 2 = 70$ cm de côté. Un lancer est gagnant si C tombe dans la région M formée des 25 petits sous-carrés blancs N ayant $10 - 2 \times 2 = 6$ cm de côté chacun. La probabilité cherchée est donc égale à



$$\frac{\text{Aire de } M}{\text{Aire de } L} = \frac{25 \times 6^2}{70^2} = \frac{5^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}{2^2 \times 5^2 \cdot 7^2} = \frac{3^2}{7^2} = \frac{9}{49} \approx 0,1837.$$

Le concours collégial de l'AMQ (2007) était sous la responsabilité d'une équipe de l'UQAM formée de Jeanne Laporte-Jobin qui s'occupe de l'administration du concours et de Gilbert et Jacques Labelle qui se chargent du questionnaire, du solutionnaire et de la correction.

L'AMQ remercie Jacques Labelle et son équipe ainsi que les responsables locaux du concours dans les collèges. Enfin, l'AMQ tient à remercier les étudiantes et les étudiants de leur participation et les félicite de leurs succès.

Résultats du concours 2007 – Ordre collégial		
Position	**Nom**	**Institution**
1	JIANG Xiao	Collège Marianopolis
2	BERG-BRISEBOIS Karl-Alexander	Cégep de Granby-Haute-Yamaska
3	SUKHDEO Devanand	Champlain Regional College
4	POULIN Guillaume	Cégep André-Laurendeau
5	URLEA Maria	Collège de Maisonneuve
6	O'CONNOR Carl	Collège Montmorency
7	DOAN Jean-François	Collège Jean-de-Brébeuf
8	GERVAIS Hualong	Collège régional Champlain St-Lambert
9 et 10	GARIEPY Geneviève	Collège André-Grasset
9 et 10	NICOLAU Stefan	Collège Jean-de-Brébeuf
11 et 12	CYR Jean-François	Collège de Bois-de-Boulogne
11 et 12	MARTEL Justin	Collège Héritage
13 et 14	BOLDUC-GILBERT Joey	Cégep Beauce-Appalaches
13 et 14	BÉLIVEAU Audrey	Collège de Bois-de-Boulogne
15	BÉLANGER Joseph André	Cégep régional de Lanaudière à Terrebonne
16 et 17	KULESHOV Volodymyr	Collège de Maisonneuve
16 et 17	LI Meng Yang	Collège Jean-de-Brébeuf
18 à 22	LAROCHELLE Pierre-Paul	Cégep de Victoriaville
18 à 22	GOSSELIN AROUET Laurent	Collège Jean-de-Brébeuf
18 à 22	LABELLE Alexandre	Collège Jean-de-Brébeuf
18 à 22	MOSCOVICI Jonathan L.	Collège Marianopolis
18 à 22	REZENDE Susanna	Collège Marianopolis
23 à 27	MANDJEE Yakin	Collège de Bois-de-Boulogne
23 à 27	BEAUREGARD GREUSARD Martin	Cégep de Granby-Haute-Yamaska
23 à 27	DESJARDINS Julie	Cégep de Rimouski
23 à 27	MICHAUD Vincent	Cégep de Rimouski
23 à 27	GAGNÉ Rémi	Cégep de Sherbrooke
28 à 30	HERTZ Anaelle	Collège de Bois-de-Boulogne
28 à 30	ATOYAN Levon	Collège Marianopolis
28 à 30	TOMBERG Alexandre	Collège Marianopolis