Association Mathématique du Québec

Racines carrées, racines cubiques

Jean M. Turgeon
Université de Montréal

Je garde un bon souvenir du moment de mon enfance où l'on m'a enseigné la méthode de calcul de la racine carrée d'un nombre. J'étais intrigué par l'étrange opération qu'il fallait effectuer après avoir trouvé chaque chiffre de la réponse (les étapes 3 et 4 ci-dessous). C'était efficace, mais personne ne semblait pouvoir me l'expliquer.

Je me propose ici (a) de présenter cette méthode, (b) d'en donner un exemple, (c) d'en présenter une justification dans une base de numération b quelconque, avec un exemple en base 7, et (d) de l'appliquer à un nombre qui est trop grand pour les calculatrices ordinaires. La suite de l'article analysera le calcul des racines cubiques.

(a) La méthode

La description qui suit est adaptée de celle des Frères des Écoles chrétiennes [1925, p. 308] et de celle du F. Robert, C.S.V. [1927, p. 131].

Étape 1. Partager le nombre donné en tranches de deux chiffres à partir de la droite ; la dernière tranche à gauche peut seule n'avoir qu'un chiffre. (Le nombre de tranches indique le nombre de chiffres de la racine.)

Étape 2. Extraire la racine carrée du plus grand carré parfait contenu dans la première tranche à gauche, ce qui donne le premier chiffre de la racine. Faire le carré de ce chiffre et le soustraire de la tranche employée.

Étape 3. À la droite du reste, écrire la tranche suivante, puis diviser ce nombre par vingt fois la racine trouvée jusqu'ici.

Étape 4. Le quotient obtenu à l'étape 3 est le second chiffre de la racine ou un chiffre trop fort. Pour le vérifier, l'écrire à la droite du double de la racine et multiplier le nombre ainsi formé par le chiffre à vérifier ; retrancher le produit du nombre qui a servi de dividende. Si la soustraction n'est pas possible, diminuer d'une unité le chiffre à vérifier et recommencer la vérification.

Étape 5. À la droite du nouveau reste, écrire la tranche suivante ; diviser le nombre ainsi formé par vingt fois la racine trouvée. Le quotient obtenu est le troisième chiffre de la racine.

Étape 6. Continuer cette série d'opérations jusqu'à ce que toutes les tranches aient été employées.

Robert [1927, p. 132] ajoute les deux remarques suivantes.

« **I.** Il arrive parfois qu'une division donne pour quotient zéro ; dans ce cas on écrit un zéro à la racine, on abaisse une tranche et l'on continue l'opération.

II. On n'a jamais à la racine un chiffre trop faible si l'on applique la règle précédente (étape 3). Mais pour diminuer les essais, il peut arriver que l'on prenne un chiffre trop faible. On reconnaît cette erreur lorsque le reste est supérieur au double de la racine trouvée. »

Nous appellerons *itérations* les applications successives des étapes 4 et 5. À chaque itération, nous noterons R la partie de la racine trouvée jusqu'à ce point.

Thérèse Éveilleau présente une description plus récente de cet algorithme dans son site Internet. Cette description provient d'un manuel de V. Lespinard et R. Pernet [1968] et comporte les neuf règles suivantes.

« 1. Écrire le nombre dont on veut extraire la racine comme le dividende d'une division.

2. Séparer en tranches de deux chiffres à partir de la droite ; la dernière tranche à gauche peut n'avoir qu'un chiffre.

3. Extraire la racine de la première tranche à gauche ; on obtient ainsi le premier chiffre de la racine cherchée qu'on écrit à la place du diviseur habituel.

4. Retrancher le carré de ce nombre d'un chiffre de la première tranche à gauche.

5. Abaisser, à droite du résultat de la soustraction précédente (premier reste partiel), la tranche suivante.

6. Séparer dans le nombre obtenu le dernier chiffre à droite et diviser le nombre restant par le double du nombre d'un chiffre écrit à la place du diviseur ; on écrit le double de ce nombre à la place du quotient.

7. Si le quotient est inférieur à 10, l'essayer, sinon commencer par essayer 9 ; l'essai se fait en écrivant ce quotient à droite du double de la racine de la première tranche et en multipliant le nombre obtenu par le quotient considéré. Si le produit peut être retranché du nombre formé au 5, le quotient convient, sinon on essaie un nombre inférieur jusqu'à ce que la soustraction soit possible.

8. Le résultat de la soustraction est le deuxième reste partiel. Écrire le nombre essayé à droite du premier chiffre écrit à la place du diviseur.

9. Recommencer avec le deuxième reste partiel comme avec le premier et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on ait utilisé toutes les tranches. Le dernier reste partiel est le reste de la racine carrée. »

La page Internet de Mme Éveilleau comporte un programme interactif qui applique les neuf règles à un entier positif (plus petit que 10^8) choisi par le visiteur du site. On peut contrôler le programme avec des boutons interactifs : arrêter, avancer ou reculer pas à pas.

(b) Un exemple

Calculer la racine carrée du nombre 2 920 710.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{\ 2\ 92\ 07\ 10} & 1 \\ \hline \underline{1} & \\ 1\ 92 & \end{array}$$

On voit ci-dessus un arrangement des calculs pour les étapes 1 et 2 et l'écriture de la tranche suivante à la droite du reste.

La division de 192 par $1 \times 20 = 20$ donne un nombre dont la partie entière est 9. À l'étape 4, on vérifie donc le chiffre 9 en multipliant 29 par 9. Le produit, 261, est trop grand. On essaie 8 ; 8 fois 28 donne 224, trop grand aussi. C'est 7 qui convient, avec $7 \times 27 = 189$. On abaisse la tranche suivante.

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{\ 2\ 92\ 07\ 10} & 1 \\ \hline
\underline{1} & 2\boxed{7} \\
1\ 92 & \\
\underline{2\ 61} & \\
\ \ -69 & \\
1\ 92 & \\
\underline{2\ 24} & \\
\ \ -32 & \\
1\ 92 & \\
\underline{1\ 89} & \\
\quad 3\ 07 &
\end{array}$$

Cet exemple illustre la deuxième remarque du F. Robert, que le nombre obtenu par la division par 20 n'est jamais trop faible. À la première itération, la division par $20R$ donne souvent un nombre trop grand parce que R est petit. La différence est très grande entre la division par 20 et la division par $20 + 9 = 29$ (29 est 45 % plus grand que 20). À l'itération 4 du présent exemple, on aura $R = 170$ et le reste à considérer sera 30 710. À ce moment-là, la différence entre la division de 30 710 par $20 \times 170 = 3\,400$ et la division du même nombre par $(20 \times 170) + 9 = 3\,409$ sera trop petite pour affecter la partie entière du quotient, qui est 9 (3 409 est environ seulement 0,26 % plus grand que 3 400).

Nous avons maintenant $R = 17$. À chaque itération, il est bon de vérifier les calculs. Ici, on a bien

$$(17)^2 + 3 = 292.$$

Pour déterminer le chiffre suivant, on divise 307 par $20 \times 17 = 340$. La partie entière du quotient étant zéro, c'est la première remarque du F. Robert qui s'applique. Après cette deuxième itération, la nouvelle valeur de R est 170. Vérification :

$$(170)^2 + 307 = 29\,207.$$

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{\ 2\ 92\ 07\ 10} & 170 \\ \hline
\underline{1} & 2\boxed{7} \\
1\ 92 & \\
\underline{1\ 89} & \\
\quad 3\ 07\ 10 &
\end{array}$$

On abaisse la tranche suivante.

Pour déterminer le chiffre suivant, on divise 30 710 par $20 \times 170 = 340$. La partie entière du quotient, tel que mentionné ci-dessus, est 9. Vérification :

$$(1709)^2 + 29 = 2\,920\,710,$$

où 29 est le *reste* du calcul de cette racine carrée.

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{\;2\;92\;07\;10} & 1709 \\ \hline
1 & 2\boxed{7} \\
\overline{1\;92} & 340\boxed{9} \\
1\;89 & \\
\overline{3\;07\;10} & \\
3\;06\;81 & \\
\overline{29} &
\end{array}$$

(c) Justification du procédé

Je supposerai ici que le lecteur est familiarisé avec la notion de *base de numération*. La base habituelle est la base 10, où les chiffres peuvent prendre dix valeurs possibles, qui sont $0, 1, 2, \ldots, 9$. Chaque chiffre d'un nombre se trouve multiplié, selon sa position, par une puissance de 10. Ainsi

$$253 = 2(10^2) + 5(10^1) + 3(10^0).$$

Dans une base b quelconque, on aura, par exemple,

$$(a_2, a_1, a_0)_b = a_2(b^2) + a_1(b^1) + a_0(b^0),$$

où les chiffres peuvent prendre b valeurs possibles, qui sont $0, 1, 2, \ldots, b-1$.

En base 10, partager le nombre donné en tranches de deux chiffres à partir de la droite, c'est l'exprimer dans la base 100, où les chiffres, au lieu d'être situés entre 0 et 9, le sont entre 0 et 99. De même, dans une base b quelconque, partager le nombre donné en tranches de deux chiffres à partir de la droite, c'est l'exprimer dans la base b^2, où les chiffres, au lieu d'être situés entre 0 et $b-1$, le sont entre 0 et $b^2 - 1$.

Le raisonnement qui suit se fera dans une notation plus simple si on généralise tout de suite à des bases b et b^2, et cette généralisation nous servira dans la suite.

Considérons un nombre de la forme

$$N^2 = c_3b^6 + c_2b^4 + c_1b^2 + c_0,$$

dont les coefficients c_i varient de zéro à b^2-1. Les c_i sont connus et on cherche des coefficients a_i, qui varient de zéro à $b-1$, tels que

$$c_3b^6 + c_2b^4 + c_1b^2 + c_0 = (a_3b^3 + a_2b^2 + a_1b + a_0)^2. \tag{1}$$

Voir l'encadré pour le calcul de ce dernier carré.

$$\boxed{\begin{array}{l}
\qquad\qquad a_3b^3 \;+\; a_2b^2 \;+\; a_1b \;+\; a_0 \\
\qquad\qquad a_3b^3 \;+\; a_2b^2 \;+\; a_1b \;+\; a_0 \\
\hline
a_3^2b^6 \;+\; a_2a_3b^5 \;+\; a_1a_3b^4 \;+\; a_0a_3b^3 \\
\qquad +\, a_2a_3b^5 \;+\; a_2^2b_4 \;+\; a_1a_2b^3 \;+\; a_0a_2b^2 \\
\qquad\qquad\quad +\, a_1a_3b^4 \;+\; a_1a_2b^3 \;+\; a_1^2b^2 \;+\; a_0a_1b \\
\qquad\qquad\qquad\qquad +\, a_0a_3b^3 \;+\; a_0a_2b^2 \;+\; a_0a_1b \;+\; a_0^2 \\
\hline
a_3^2b^6 \;+\; 2a_2a_3b^5 \;+\; (a_2^2 + 2a_1a_3)b^4 \;+\; (2a_0a_3 + 2a_1a_2)b^3 \;+\; (a_1^2 + 2a_0a_2)b^2 \;+\; 2a_0a_1b \;+\; a_0^2
\end{array}}$$

L'intention est de comparer les coefficients de part et d'autre de l'équation (1) afin de calculer successivement a_3, puis a_2, a_1 et a_0. On écrira donc les coefficients du côté droit de l'équation (1) de manière à trouver, dans le coefficient de b^6, uniquement a_3. Dans le coefficient de b^4 apparaîtront a_3 et a_2, mais ni a_1, ni a_0 ; dans celui de b^2, a_3, a_2 et a_1, mais non a_0. La constante est le seul terme à contenir a_0. On obtient la forme suivante du côté droit de (1) :

$$\begin{aligned}
(a_3b^3 + a_2b^2 + a_1b + a_0)^2 \quad = \quad & a_3^2b^6 + [2a_3a_2b + a_2^2]b^4 \\
& + [2a_1a_3b^2 + 2a_1a_2b + a_1^2]b^2 \\
& \quad + [2a_0a_3b^3 + 2a_0a_2b^2 + 2a_0a_1b + a_0^2].
\end{aligned}$$

Si on met en facteur a_2 dans le coefficient de b^4, a_1 dans le coefficient de b^2 et a_0 dans le terme constant, N^2 peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}(a_3b^3+a_2b^2+a_1b+a_0)^2 &= a_3^2b^6+[(2a_3b+a_2)a_2]b^4\\ &\quad+\{[2(a_3b+a_2)b+a_1]a_1\}b^2\\ &\qquad+[2(a_3b^2+a_2b+a_1)b+a_0]a_0.\end{aligned}$$

Mais $(a_3b^2+a_2b+a_1)$ est le nombre en base b dont les chiffres sont a_3, a_2 et a_1 :

$$(a_3a_2a_1)_b.$$

De même,

$$(a_3b+a_2)=(a_3a_2)_b \text{ et } a_3=(a_3)_b.$$

On peut donc écrire N^2 sous la forme

$$\begin{aligned}(a_3b^3+a_2b^2+a_1b+a_0)^2 &= a_3^2b^6+[(2(a_3)_bb+a_2)a_2]b^4\\ &\quad+\{[2(a_3a_2)_bb+a_1]a_1\}b^2\\ &\qquad+[2(a_3a_2a_1)_bb+a_0]a_0.\end{aligned}$$

L'algorithme consiste donc à trouver d'abord le plus grand entier a_3 dont le carré est plus petit ou égal à c_3. On soustrait a_3^2 de c_3 ; cette différence est la somme des retenues des multiplications qui suivent. Connaissant la valeur de a_3, on aborde le coefficient de b_4. À l'étape 3, on divise la différence par a_3 multiplié par deux fois la base, pour obtenir une approximation de a_2. La vérification consiste à calculer le coefficient de b^4 dans l'expression ci-dessus : $(2(a_3)_bb+a_2)a_2$.

En général, soit R la partie de la racine trouvée à une certaine étape. Alors on divise la différence qui reste par $2Rb$ (en base 10, c'est « vingt fois la racine trouvée jusqu'ici ») pour avoir une idée du chiffre x suivant, puis on vérifie x par la formule $(2Rb+x)x$.

Exemple. En base 7, calculer la racine carrée du nombre $(6\,611\,334)_7$. Voici la solution.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{6\ 61\ 13\ 34} & 2\ 4\ 2\ 3 \\
\ 4 & 4\,\boxed{5} \\
\ 2\ 61 & 4\,\boxed{4} \\
\ 3\ 24 & 51\boxed{2} \\
\text{négatif} & 514\boxed{3} \\
\ 2\ 61 & \\
\ 2\ 42 & \\
\quad 16\ 13 & \\
\quad 13\ 24 & \\
\quad\ \ 2\ 56\ 34 & \\
\quad\ \ 2\ 14\ 62 & \\
\qquad\ \ 41\ 42 &
\end{array}
$$

La réponse est

$$(6\,611\,334)_7 = (2\,423)_7^2 + (4\,142)_7.$$

Le reste paraît grand est suggère que la racine pourrait être plus grande que $(2\,423)_7$. Mais

$$(2\,424)_7^2 = (6\,612\,342)_7.$$

Notre réponse est donc correcte.

(d) Application à un grand nombre

Exemple. S'aider d'une calculatrice pour calculer la racine carrée du nombre à 24 chiffres

$$844\,897\,070\,137\,422\,318\,081\,129.$$

Si votre calculatrice est une TI-89 ou une TI-92, vous n'avez qu'à mettre ce nombre entre les parenthèses de la commande ✓(...), et le tour est joué.

Avec une calculatrice qui ne peut manipuler plus de 8 chiffres à la fois, on exprimera le nombre en base 10 000, où les chiffres vont de 0 à 9 999, et les calculs ressembleront aux suivants. Noter que la calculatrice répond à la commande « 84489707 suivi de ✓ » par le nombre

$$9191, 8282,$$

de sorte que l'on a déjà la deuxième tranche de la réponse.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{84489707\ 01374223\ 18081129} & 9191\ 8282\ 7373 \\
\ 84474481 & 18382\ \boxed{8282} \\
\quad 15226\ 01374223 & 18383\ 6564\ \boxed{7373} \\
\quad 15224\ 65831524 & \\
\qquad\quad 1\ 35542699\ 18081129 &
\end{array}
$$

Avec une calculatrice qui peut manipuler 10 chiffres à la fois, on exprimera le nombre en base 100 000, où les chiffres vont de 0 à 99 999, et les calculs ressembleront aux suivants.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{8448\ \ 9707013742\ \ 2318081129} & 91\ \ 91828\ \ 27373 \\
\cline{2-2}
\underline{8281} & 182\ \boxed{91828} \\
\quad 167\ \ 9707013742 & 18383656\ \boxed{27373} \\
\quad \underline{167\ \ 9701981584} & \\
\qquad\qquad 5032158\ \ 2318081129 &
\end{array}
$$

Pour ces calculs, on pourra utiliser les techniques présentées dans Turgeon [1999].

(e) Calcul de racines cubiques

Voici les étapes décrites dans le manuel du F. Robert [1927, p. 142]).

Étape 1. Partager le nombre en tranches de trois chiffres en commençant par la droite ; la dernière tranche à gauche peut seule n'avoir qu'un ou deux chiffres. Le nombre de tranches indique le nombre de chiffres de la racine.

Étape 2. Extraire la racine cubique du plus grand cube parfait contenu dans la première tranche à gauche, ce qui donne le premier chiffre de la racine. Faire le cube de ce chiffre et le soustraire de la tranche employée.

Étape 3. À la droite du reste, écrire la tranche suivante et diviser ce nombre par trois cents fois le carré de la racine trouvée. Le quotient obtenu est le second chiffre de la racine ou un chiffre trop fort. Vérifier ce chiffre.

Étape 4. À droite du reste, écrire la tranche suivante et diviser ce nombre par trois cents fois le carré de la racine trouvée. Le quotient obtenu est le troisième chiffre de la racine. Vérifier ce chiffre.

Étape 5. Continuer cette série d'opérations jusqu'à ce que toutes les tranches aient été employées.

Voici en quoi consiste la vérification à effectuer aux étapes 3 et 4. Soit R la partie de la racine cubique déjà trouvée et soit x le nombre à vérifier. Calculer

$$x^3 + 30Rx^2 + 300R^2x. \tag{2}$$

Si ce nombre est plus petit ou égal au nombre obtenu en abaissant la tranche suivante, alors x est le prochain chiffre.

Robert [1927, p. 142] ajoute les deux remarques suivantes.

« **I.** Il arrive parfois qu'une division donne pour quotient zéro ; dans ce cas, on met un zéro à la racine, on abaisse une autre tranche et l'on continue l'opération.

II. On n'a jamais à la racine un chiffre trop faible si l'on applique la règle précédente. Mais, pour diminuer les essais, il peut arriver qu'on prenne un chiffre trop faible. On reconnaît qu'un chiffre est trop faible lorsque le reste est supérieur à 3 fois le carré de la racine trouvée, plus 3 fois cette même racine. »

(f) Un exemple

Calculer la racine cubique du nombre 1 740 992 458.

Dans les calculs de cet exemple, nous aurons plusieurs fois à évaluer l'expression (2), un polynôme de degré 3. Cette évaluation est grandement simplifiée si on a recours à la *méthode de Horner*. Cette méthode évite de calculer séparément les puissances de la variable. On écrit le polynôme dans la forme suivante.

$$\begin{aligned} f(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ &= \{a_3x^2 + a_2x + a_1\}x + a_0 \\ &= \{[a_3x + a_2]x + a_1\}x + a_0. \end{aligned}$$

Au lieu de calculer les puissances de x, puis de les multiplier par les coefficients, on multiplie a_3 par x, on ajoute a_2, on multiplie la somme par x, on ajoute a_1, on multiplie la nouvelle somme par x et on ajoute a_0. Ces opérations sont possibles même avec une calculatrice simple, qui n'a que les quatre opérations arithmétiques, et elles se présentent commodément dans un tableau. Exemple : évaluer

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6$$

à $x = 2$. Voici le tableau.

$$\begin{array}{c|cccc|} & 2 & -5 & 0 & 6 \\ 2 & & 4 & -2 & -4 \\ \hline & 2 & -1 & -2 & 2 \end{array}$$

On voit ci-dessous l'arrangement des calculs pour les étapes 1 et 2 et l'abaissement de la deuxième tranche.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{1\quad 740\quad 992\quad 458} & 1 \\ \cline{2-2} 1\qquad\qquad\qquad & \\ \hline 0\quad 740\qquad\qquad\quad & \end{array}$$

La partie entière de 740 divisé par $300 \times 1^2 = 300$ est 2. Pour vérifier ce chiffre, on applique la formule (2) avec la méthode de Horner :

$$\begin{array}{c|rrrr|} & 1 & 30 & 300 & 0 \\ 2 & & 2 & 64 & 728 \\ \hline & 1 & 32 & 364 & 728 \end{array}$$

Comme $728 < 740$, le chiffre 2 convient. On soustrait 728 de 740 et on abaisse la tranche suivante. La partie entière de 12 992 divisé par $300 \times 12^2 = 43\,200$ est zéro. On applique la première remarque du F. Robert et on abaisse la tranche suivante.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt[3]{1\quad 740\quad 992\quad 458} & 1\ 20 \\ \cline{2-2} \quad\ 1 & \\ \quad\ 0\quad 740 & \\ \qquad\ \ \ 728 & \\ \qquad\ \ \ 12\quad 992\quad 458 & \end{array}$$

Pour déterminer le dernier chiffre, on divise 12 992 458 par $300 \times 120^2 = 4\,320\,000$. La partie entière de ce quotient est 3. On vérifie à l'aide de la formule (2) :

$$\begin{array}{c|rrrr|} & 1 & 3600 & 4\,320\,000 & 0 \\ 3 & & 3 & 10\,809 & 12\,992\,427 \\ \hline & 1 & 3603 & 4\,330\,809 & 12\,992\,427 \end{array}$$

Donc le chiffre 3 convient. La soustraction nous fait découvrir un reste de 31.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt[3]{1\quad 740\quad 992\quad 458} & 1\ 203 \\ \cline{2-2} \quad\ 1 & \\ \quad\ 0\quad 740 & \\ \qquad\ \ \ 728 & \\ \qquad\ \ \ 12\quad 992\quad 458 & \\ \qquad\ \ \ 12\quad 992\quad 427 & \\ \qquad\qquad\qquad\quad\ \ 31 & \end{array}$$

Vérification : on a bien

$$(1\,203)^3 + 31 = 1\,740\,992\,458.$$

(g) Justification du procédé

Considérons un nombre de la forme

$$N^3 = c_2b^6 + c_1b^3 + c_0,$$

dont les coefficients c_i varient de zéro à b^3-1. Les c_i sont connus et on cherche des coefficients a_i, qui varient de zéro à $b-1$, tels que

$$c_2b^6 + c_1b^3 + c_0 = (a_2b^2 + a_1b + a_0)^3. \tag{3}$$

Voir l'encadré pour le calcul de ce dernier cube.

$$\begin{array}{r}
a_2b^2 + a_1b + a_0 \\
\times\ a_2b^2 + a_1b + a_0 \\
\hline
\begin{array}{lll}
a_2^2b^4 + a_1a_2b^3 + a_0a_2b^2 & & \\
\quad + a_1a_2b^3 & + a_1^2b^2 + a_0a_1b & \\
 & + a_0a_2b^2 & + a_0a_1b + a_0^2
\end{array} \\
\hline
a_2^2b^4 + 2a_1a_2b^3 + (a_1^2 + 2a_0a_2)b^2 + 2a_0a_1b + a_0^2 \\
\times\ a_2b^2 + a_1b + a_0
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllllll}
\hline
a_2^3b^6 & + 2a_1a_2^2b^5 & + (a_1^2a_2 + 2a_0a_2^2)b^4 & + 2a_0a_1a_2b^3 & + a_0^2a_2b^2 & & \\
 & + a_1a_2b^5 & + 2a_1^2a_2b^4 & + (a_1^3 + 2a_0a_1a_2)b^3 & + 2a_0a_1^2b^2 & + a_0^2a_1b & \\
 & & + a_0a_2^2b^4 & + 2a_0a_1a_2b^3 & + (a_0a_1^2 + 2a_0^2a_2)b^2 & + 2a_0^2a_1b & + a_0^3 \\
\hline
\end{array}$$

$$a_2^3b^6 + 3a_1a_2^2b^5 + (3a_1^2a_2 + 3a_0a_2^2)b^4 + (a_1^3 + 6a_0a_1a_2)b^3 + (3a_0^2a_2 + 3a_0a_1^2)b^2 + 3a_0^2a_1b + a_0^3$$

Calcul du cube de $a_2b^2 + a_1b + a_0$.

L'intention est de comparer les coefficients de part et d'autre de l'équation (3) afin de calculer successivement a_2, puis a_1 et a_0. On écrira donc les coefficients du côté droit de l'équation (3) de manière à trouver, dans le coefficient de b^6, uniquement a_2. Dans le coefficient de b^3 apparaîtront a_2 et a_1, mais non a_0. La constante est le seul terme à contenir a_0. On obtient la forme suivante du côté droit de (3) :

$$\begin{aligned}(a_2b^2+a_1b+a_0)^3 &= a_2^3b^6+[3a_1a_2^2b^2+3a_1^2a_2b+a_1^3]b^3\\ &\quad +[3a_0a_2^2b^4+6a_0a_1a_2b^3\\ &\qquad +(3a_0^2a_2+3a_0a_1^2)b^2+3a_0^2a_1b+a_0^3].\end{aligned}$$

Dans le coefficient de b^3, a_2 est connu et nous avons un polynôme en a_1 :

$$a_1^3+(3ba_2)a_1^2+(3b^2a_2^2)a_1+0.$$

Si on écrit R pour la partie connue de la racine cubique, l'expression devient

$$a_1^3+(3bR)a_1^2+(3b^2R^2)a_1+0.$$

De même, la constante est un polynôme en a_0 :

$$a_0^3+(3a_2b^2+3a_1b)a_0^2+(3a_2^2b^4+6a_1a_2b^3+3a_1^2b^2)a_0$$

où

$$3a_2b^2+3a_1b=3b(a_2a_1)_b$$

et

$$3a_2^2b^4+6a_1a_2b^3+3a_1^2b^2=3b^2(a_2b+a_1)^2=3b^2(a_2a_1)_b^2.$$

La constante est donc

$$a_0^3+3b(a_2a_1)_ba_0^2+3b^2(a_2a_1)_b^2a_0.$$

Ici on a $R=(a_2a_1)_b$ et l'expression devient

$$a_0^3+(3bR)a_0^2+(3b^2R^2)a_0+0.$$

En base 10, c'est notre polynôme (2).

Conclusion

Je m'étais donné comme défi d'expliquer clairement les algorithmes de calcul des racines carrées et cubiques. Pour trouver une racine quatrième, on calcule la racine carrée de la racine carrée. Au lecteur de trouver l'algorithme qui convient à la racine cinquième !

Références bibliographiques

Hodgson, Bernard, Coup d'oeil à saveur historique sur l'extraction de racine carrée. Bulletin AMQ (mai 2006).

Les Frères des Écoles chrétiennes [1925], Arithmétique (cours primaire supérieur), sixième et septième années. Prix : 70 sous.

Lespinard, V. et R. Pernet [1968], Manuel de Terminale C, cité dans le site Internet http :// perso.wanadoo.fr/ therese.eveilleau/ pages/ trucmat/ textes/ rcarreeanc.htm#zerobis.

Robert, F., C.S.V., [1927], L'arithmétique des écoles, cours supérieur, Les Clercs de Saint-Viateur, Montréal, 31 + 500 pages. Prix : 75 sous.

Turgeon, Jean M. [1999], Petites calculatrices, grands nombres. Bulletin AMQ, vol. 39, no 1, p. 18-21.