Concours de l'Association Mathématique du Québec
2005
Ordre secondaire

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Le concours de l'Association mathématique du Québec n'est pas un examen. Il vise à déceler les meilleurs talents en mathématiques parmi la population étudiante. Le questionnaire est varié : plusieurs genres de questions et divers degrés de difficulté. Qu'un étudiant ne se décourage pas s'il n'arrive pas à répondre à plus de trois ou quatre questions. Les auteurs du questionnaire s'attendent à ce que les bons étudiants fournissent quatre ou cinq bonnes réponses. Bonne chance !

Note : *L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

QUESTION 1 – Le robot et les pommes

Une caisse de bois est séparée en 9 compartiments comme indiqué sur le dessin. Un ingénieur a programmé un robot pour qu'il remplisse la caisse de pommes par paquets de quatre en laissant tomber une pomme dans chaque compartiment de façon à former un carré 2×2. Est-il possible pour le robot d'aboutir à la configuration ci-dessus à partir d'une caisse vide ?

6	16	10
11	28	17
5	12	7

Solution

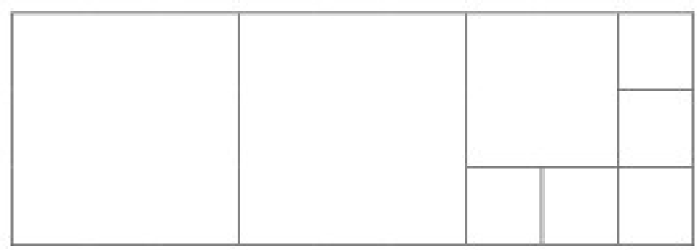
La réponses est oui. On applique l'opération six fois au carré 2×2 du coin Nord-Ouest, cinq fois au carré 2×2 du coin Sud-Ouest, sept fois au carré 2×2 du coin Sud-Est et enfin 10 fois au carré 2×2 du coin Nord-Est.

QUESTION 2 – Huit carrés dans un rectangle

Diviser un rectangle de longueur égale à 9 cm et de largeur à 3 cm en huit carrés.

Solution

Il y a plusieurs solutions possibles. En voici une :



QUESTION 3 – Une étonnante distribution

Une distribution statistique est composée de 10 nombres naturels : $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3,$ y_4, y_5. Lorsqu'ils sont placés en ordre croissant, ces nombres nous donnent en fait la distribution suivante : $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_5, y_4, y_3, y_2, y_1$. Nous avons plusieurs informations :

(1) Les couples $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ et (x_5, y_5), sont tous sur la droite $\boldsymbol{d}$ d'équation $y = -2x + 24$.

(2) La moyenne de cette distribution est 9,4.

(3) La médiane et le mode ont tous deux la même valeur.

(4) Les nombres x_3 et x_4 sont consécutifs.

(5) Le premier membre de la distribution vaut 1.

(6) La droite $\boldsymbol{d}$ croise la parabole d'équation $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 8x - 8$ au point (x_2, y_2).

Trouver les valeurs de la distribution originale $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$.

Suggestion : La médiane est le nombre tel que 50 % des observations sont plus petites ou égale à ce nombre et 50 % supérieure ou égale. Le mode est la valeur qui est observée le plus souvent.

Solution

À cause de (5), $x_1 = 1$. Par (1), le couple (x_1, y_1) est sur la droite $\boldsymbol{d}$ d'équation $y = -2x+24$ et nous trouvons facilement $y_1 = 22$. Il suffit d'utiliser (6) pour trouver le point (x_2, y_2). En effet, nous avons les deux équations $y_2 = -(1/2)x_2^2 + 8x_2 - 8$ et $y_2 = -2x_2 + 24$. Il y a deux solutions possibles pour x_2, soit $x_2 = 16$ et $x_2 = 4$. La solution $x_2 = 16$ est à rejeter car elle donne $y_2 = -8$, ce qui n'est pas admis. Il reste $x_2 = 4$ et $y_2 = -8 + 24 = 16$.

À ce stade, notre distribution s'écrit $1, 4, x_3, x_4, x_5, 22, 16, y_3, y_4, y_5$. Par contre (4), nous dit que celle-ci s'écrit encore $1, 4, x_3, x_3 + 1, x_5, 22, 16, y_3, y_4, y_5$. En tenant compte de (3) et de l'ordre croissant des nombres dans la distribution $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_5, y_4, y_3, y_2, y_1$, la médiane est ici donnée par $(x_5 + y_5)/2$ et elle doit être égale au mode. On peut facilement montrer que le mode et la médiane sont confondus si et seulement si $x_5 = y_5 = 8$. Il reste à trouver x_3. La moyenne de la distribution est donnée par : $M = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + y_5 + y_4 + y_3 + y_2 + y_1)/10$. Ce qui implique que $1 + 4 + x_3 + x_4 + 8 + 8 + (-2x_4 + 24) + (-2x_3 + 24) + 16 + 22 = 94$, ou encore, en tenant compte du fait que $x_4 = x_3 + 1$, on obtient $-2x_3 + 106 = 94 \Rightarrow x_3 = 6$ et $x_4 = 7$. On déduit finalement les valeurs $y_3 = 12$ et $y_4 = 10$. La distribution originale est donc $1, 4, 6, 7, 8, 22, 16, 12, 10, 8$.

QUESTION 3 – La belle somme de Gilbert Labelle

Considérons les 6 façons possibles de permuter (c'est-à-dire mélanger) les chiffres du nombre 123 et additionnons le tout. La somme trouvée s'écrit :

$$123 + 132 + 213 + 231 + 312 + 321 = 1332.$$

Quel résultat aurions-nous obtenu si nous avions fait la somme des 5040 façons de permuter les chiffres du nombre 1 234567 ?

Solution

Dans les 5040 permutations, chaque chiffre, parmi $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, apparaît $5040/7$ fois comme unité, le même nombre de fois comme dizaine, comme centaine,... comme million. Le total est donc

$720{\cdot}(1{+}2{+}3{+}4{+}5{+}6{+}7){\cdot}(1{+}10{+}100{+}1\,000{+}10\,000{+}100\,000{+}1\,000\,000) = 720.28.1111111$
$= 22399997760.$

QUESTION 5 – Le voyage à Québec

Juliette et Philippe partent en même temps et parcourent les 250 km qui séparent Montréal de Québec dans deux voitures identiques. Philippe parcourt la première moitié du trajet à 80 km/h et la seconde moitié à 120 km/h. En fait, il arrive en même temps que Juliette qui a roulé tout le long à une vitesse constante. La consommation d'essence de ce type de voiture dépend de la vitesse du véhicule. Elle est donnée par la formule $c = 10 + \frac{v}{20}$, où v est la vitesse en km/h et c la consommation en litres par 100 km.

Sachant que ce jour-là, le litre d'essence vaut 0,80$, combien ont-il dépensé ensemble pour le voyage ?

Solution

Soit c_1 et c_2 les consommations respectives (par 100 km) de Philippe durant chacune des moitiés : $c_1 = 10 + \frac{80}{20} = 14$ et $c_1 = 10 + \frac{120}{20} = 16$. Comme il parcourt durant chacune des moitiés 125 km, sa consommation totale est $1,25(c_1 + c_2) = 1,25(14 + 16) = 1,25 \times 30$. Puisqu'un litre vaut 0,80$, le coût total de Phillippe est $0,80 \times 1,25 \times 30 = 30,00$.

Calculons maintenant le coût total de Juliette. Il faut donc établir sa vitesse. Comme elle a parcouru le trajet dans le même temps que Philippe, sa vitesse est égale à la vitesse moyenne de Philippe. Contrairement à ce qu'on pourrait croire, la vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours n'est pas égale à la moyenne des vitesses sur le parcours.

La vitesse moyenne est donnée par $v = \frac{250\,\text{km}}{t_1 + t_2}$, où t_1 et t_2 représentent les temps de parcours (en heures) de chacune des moitiés. On a $t_1 = \frac{125\,\text{km}}{80\,\text{km/h}}$ et $t_2 = \frac{125\,\text{km}}{120\,\text{km/h}}$. Donc,

$$v = \frac{250\,\text{km}}{\frac{125\,\text{km}}{80\,\text{km/h}} + \frac{125\,\text{km}}{120\,\text{km/h}}} = \frac{2 \times 80\,\text{km/h} \times 120\,\text{km/h}}{(80\,\text{km/h} + 120\,\text{km/h})} = 96\,\text{km/h}.$$

La consommation de Juliette est de $10 + \frac{96}{20} = 14,8$ litres par 100 km. Sa consommation totale d'essence aura donc été de $14,8 \times 2,5$ et le coût total de Juliette, $0,80 \times 14,8 \times 2,5 = 2 \times 14,8 = 29,60$. Ensemble, le voyage aura coûté en carburant $30,00 + 29,60 = 59,60$.

QUESTION 6 – Les âges multiples

Du 21 août 1989 au 7 mai (inclusivement) 1990, Jean a eu 5 fois l'âge de sa fille Claire. Du 8 mai au 20 août (inclusivement) 1992, Jean a eu 4 fois l'âge de sa fille. Trouver la date de naissance de chacun.

(Note : par âge, on entend la définition usuelle qui est le nombre d'années complètes écoulées depuis le dernier anniversaire).

Solution

Il est clair qu'il faille considérer deux possibilités :

Cas 1 : Jean est né un 8 mai et Claire, un 21 août.

Cas 2 : L'inverse, i.e. Jean est né un 21 août et Claire, un 8 mai.

Il n'est pas a priori évident que ces deux cas vont mener à des solutions acceptables, mais nous verrons bien et, d'ailleurs, il faut vérifier chaque cas. On désignera par J l'année de naissance de Jean et par C l'année de naissance de Claire. Nous allons également utiliser le fait que l'âge de quelqu'un (Jean, par exemple) durant l'année X est égal à $X - J$ si l'anniversaire de la personne a eu lieu dans l'année X au temps considéré et $X - J - 1$ si l'anniversaire de la personne n'a pas encore eu lieu dans l'année.

Nous allons calculer sur deux dates, la première choisie arbitrairement entre le 21 août 1989 et le 7 mai 1990, soit le 31 décembre 1989, et l'autre choisie arbitrairement entre le 8 mai et le 20 août 1992, soit le 1$^{\text{er}}$ juillet 1992.

Considérons maintenant le *cas 1.*

Le 1$^{\text{er}}$juillet 1992, nous avons :

$$\text{Âge de Jean :} \quad 1992 - J$$

$$\text{Âge de Claire :} \quad 1991 - C$$

et

$$1992 - J = 4(1991 - C) \tag{1}$$

Le 31 décembre 1989, nous avons :

$$\text{Âge de Jean :} \quad 1989 - J$$

$$\text{Âge de Claire :} \quad 1989 - C$$

et

$$1989 - J = 5(1989 - C) \tag{2}$$

En soustrayant (2) de (1), on trouve

$$(1992 - J) - (1989 - J) = 4(1991 - C) - 5(1989 - C)$$

i.e

$$3 = C - 1981, \text{ soit } C = 1984 \text{ et } J = 1964.$$

En effet, le 31 juillet 1992, Jean avait 28 ans, soit quatre fois l'âge de Claire. Le 31 décembre 1989, Jean avait 25 ans, soit cinq fois l'âge de Claire.

Cas 2 :

De façon analogue, si on permute les dates d'anniversaire de chacun, on trouve :
Le 1$^{\text{er}}$ juillet 1992, nous avons :

$$\text{Âge de Jean :} \quad 1991 - J$$

$$\text{Âge de Claire :} \quad 1992 - C$$

et

$$1991 - J = 4(1992 - C) \tag{1}$$

Le 31 décembre 1989, nous avons :

$$\text{Âge de Jean :} \quad 1989 - J$$

$$\text{Âge de Claire :} \quad 1989 - C$$

et

$$1989 - J = 5(1989 - C) \tag{2}$$

Toujours en soustrayant (2) de (1), on a

$$(1991 - J) - (1989 - J) = 4((1992 - C) - 5(1989 - C), \text{ i.e } C = 1979 \text{ et } J = 1939.$$

Ainsi, le 1$^{\text{er}}$juillet 1992, Jean et Claire ont respectivement 52 et 13 ans, tandis qu'au 31 décembre 1989, ils ont 50 et 10 ans.

Il y a donc deux solutions :

Naissance de Jean :	8 mai 1964
Naissance de Claire :	21 août 1984

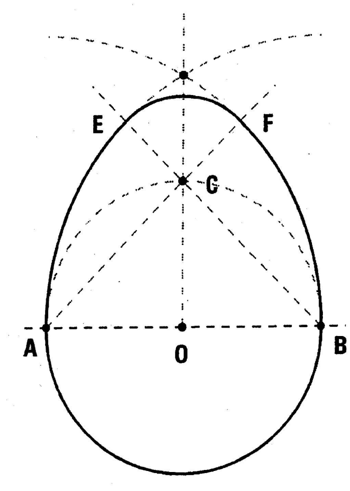
ou

Naissance de Jean :	21 août 1939
Naissance de Claire :	8 mai 1979

QUESTION 7 – La poule géomètre

Une figure plane en forme d'oeuf est délimitée par quatre arcs de cercles désignés par $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BF}, \overset{\frown}{FE}$ et $\overset{\frown}{EA}$ mis bout à bout de la façon indiquée par la figure ci-dessous.

Sachant que le rayon $A0$ est de longueur 1, déterminer l'aire de la figure.



Solution

Notons que le segment $\underline{AC} = \sqrt{2}$. L'aire de l'oeuf $\boldsymbol{A}$ est égale à l'aire du demi-cercle ABO de (rayon 1) + l'aire du secteur BAF (rayon 2) + l'aire du secteur ABE (rayon 2) + l'aire du quart de cercle (rayon $(2-\sqrt{2})$) − aire du triangle ABC (base 2 et hauteur 1). On obtient donc $\boldsymbol{A} = \pi/2 + (1/8)\pi \cdot 2^2 + (1/8)\pi \cdot 2^2 + (1/4)\pi \cdot (2-\sqrt{2})^2 - (1/2)2 \cdot 1 = (3-\sqrt{2}) \cdot \pi - 1$ ce qui donne approximativement $\boldsymbol{A} = 3,9819$.

Les problèmes et le corrigé du Concours de l'Association mathématique du Québec de l'an 2005 ont été conçus par M. Matthieu Dufour, Mme Véronique Hussin (présidente), M. Gilbert Labelle et M. Jean M. Turgeon.

Il convient de remercier la Société mathématique du Canada *qui nous a généreusement accordé une subvention de fonctionnement encore cette année.*

Résultats du concours 2005 – Ordre secondaire		
Rang	**Nom**	**Institution**
1er	TOTEVA, Teodora	École secondaire Pierre-Laporte, Montréal
2^{e}	BRUNET, Thomas	École secondaire de Rochebelle, Ste-Foy
	CÔTÉ, Mathieu,	École secondaire Antoine-Brossard, Brossard
4^{e}	GU, Ye	École secondaire Antoine-Brossard, Brossard
5^{e}	DI SALVIO, Anthony	Collège Jean-Eudes, Montréal
6^{e}	VERES, Adrian	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
7^{e}	COURNOYER, Alexis	Collège Jean-Eudes, Montréal
	DOAN, Jean-François	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
9^{e}	PELLETIER, François	Lycée du Saguenay, Chicoutimi
	SUTCLIFFE, Andrew	Collège Ste-Anne, Lachine
11^{e}	LVOV, Nikita	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	ZAKHAROV, Pavel	École secondaire Sophie-Barat, Montréal
13^{e}	BUREAU, Julien	Collège Mont-St-Louis, Montréal
	LÉPINE, Mathieu	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	LIU, Tuo	École Internationale de Montréal, Montréal
	MICHAUD-RIOUX, Vincent	École Le Mistral, Mont-Joli
	SCULLION, Andrew	Collège St-Alexandre, Gatineau
18^{e}	GAUTHIER-DUCHESNE, Jacques	Collège St-Charles Garnier, Québec
19^{e}	EVERSHED, Zhachary	Collège St-Alexandre, Gatineau
	IONUT, Alexandru	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
21^{e}	BOUTHILLIER, Mathieu	Collège Charles-Lemoyne “L’Envol”, Longueuil
	CONSTANTINIDIS, Nicholas	Collège Jean-Eudes, Montréal
	LI, Mengyang	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
24^{e}	AVIS, Éric	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	CHABOT, Julia	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	GAUDREAU, Evelyne	Collège Beaubois, Pierrefonds
	S. CHRISTIN, Laurent	Collège Jean-Eudes, Montréal
28^{e}	BESSETTE, Marie-Pier	École secondaire St-Joseph, St-Hyacinthe
	DION, Geneviève	Polyvalente de la Baie, La baie
	LAVOIE, Cédric	École secondaire d’Iberville, Rouyn-Noranda
	PARIS-CLOUTIER, Marc-André	Collège St-Alexandre, Gatineau
	QIAN, Junyi	Collège Beaubois, Pierrefonds
33^{e}	AGENOR, Aouod Quang	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
34^{e}	BERGERON, Luc	École secondaire Jacques-Rousseau, Longueuil
	LABELLE, Alexandre	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	LIU, Stanley	École secondaire de la Magdeleine, La Prairie
	ROUSSEAU, Matthieu	Collège Ste-Anne, Lachine