



---

## Concours de l'Association Mathématique du Québec 2005 Ordre collégial

---

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

*Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours ; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.*

*Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.*

**Note :** *L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

---

### QUESTION 1 – L'excellent tireur de la compétition

Durant une compétition, un tireur a réussi 50 tirs consécutifs de pistolet sur une cible carrée de 70 cm par 70 cm. Prouvez qu'au moins deux des centres des trous sur la cible sont à moins de 15 cm l'un de l'autre.

#### Esquisse de solution :

Subdivisons le carré 70 cm par 70 cm en 49 petits carrés de 10 cm par 10 cm. Comme il y a 50 trous sur la mire, au moins deux d'entre-eux tombent dans ou sur la frontière d'un même petit carré. Les milieux de ces deux trous sont à au plus  $10\sqrt{2} = 14,142\dots < 15$  cm l'un de l'autre.

### QUESTION 2 – Identité trigonométrique à gogo

Démontrer la curieuse identité trigonométrique suivante :

$$3 \sin^2(2\theta) + 4 \sin^6(\theta) + 4 \cos^6(\theta) = 4.$$

**Esquisse de solution :**

En posant  $a = \sin^2 \theta$  et  $b = \cos^2 \theta$  dans l'identité bien connue,

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$

on obtient

$$\begin{aligned} \sin^6 \theta + \cos^6 \theta &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^4 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta) \\ &= \sin^4 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta, \end{aligned} \tag{1}$$

puisque  $(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 1$ .

Mais,

$$\begin{aligned} \sin^4 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 - 3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &= 1 - 3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &= 1 - \frac{3}{4} (2 \sin \theta \cos \theta)^2 \\ &= 1 - \frac{3}{4} \cdot \sin^2(2\theta). \end{aligned} \tag{2}$$

Combinant (1) et (2), on trouve  $4 \sin^6 \theta + 4 \cos^6 \theta = 4 - 3 \sin^2(2\theta)$ .

**QUESTION 3 – Le nombre irrationnel élevé à sa propre puissance**

Soit  $x$  l'unique nombre réel satisfaisant les conditions

$$x^x = 2, \quad x > 0.$$

Prouver que  $x$  est irrationnel (c'est-à-dire que  $x$  n'est pas de la forme  $m/n$  où  $m$  et  $n$  sont des entiers).

**Esquisse de solution :**

Par l'absurde. Supposons que  $x = m/n$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $m > 0$ ,  $n > 0$  et que  $m$  et  $n$  n'ont pas de diviseurs commun (i.e.  $m/n$  est une fraction « simplifiée »). On a successivement,  $(\frac{m}{n})^{\frac{m}{n}} = 2 \Rightarrow (\frac{m}{n})^m = 2^n \Rightarrow m^m = 2^n \cdot n^m \Rightarrow m = 2m_1$  ( $m$  pair).

$$\text{Donc, } (2m_1)^{2m_1} = 2^n \cdot n^{2m_1} \Rightarrow 2^{2m_1} m_1^{2m_1} = 2^n n^{2m_1}.$$

Mais,  $m > n$  (sinon  $x^x < 1$ ).

Donc  $2m_1 > n$ .

D'où  $2^{2m_1-n} m_1^{2m_1} = n^{2m_1}$ .

Ce qui entraîne qu'on a aussi  $n = 2n_1$  ( $n$  pair). Ainsi  $m = 2m_1, n = 2n_1$ , et la fraction  $m/n$  ne pouvait être simplifiée. Contradiction.

#### QUESTION 4 – Tellement de chemins !

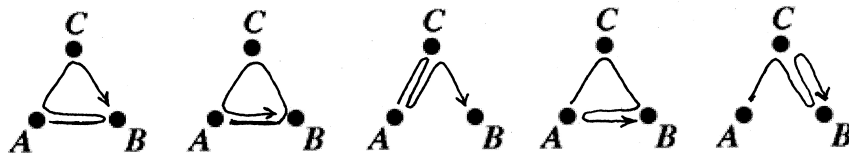
Soit  $ABC$  un triangle équilatéral de côté 1. Prouver que pour tout entier  $n \geq 0$ , il y a exactement

$$\frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}$$

chemins de longueur  $n$  allant de  $A$  à  $B$  en suivant les côtés de ce triangle.

Exemple : pour  $n = 4$ , il y a  $\frac{2^4 + (-1)^5}{3} = 5$  chemins de longueur 4 allant de  $A$  à  $B$ .

Les voici :



#### Esquisse de solution :

Soit

$x_n =$  le nombre de chemins de longueur  $n$  allant de  $A$  à  $B$ ,

$y_n =$  le nombre de chemins de longueur  $n$  allant de  $A$  à  $C$ ,

$z_n =$  le nombre de chemins de longueur  $n$  allant de  $A$  à  $A$ .

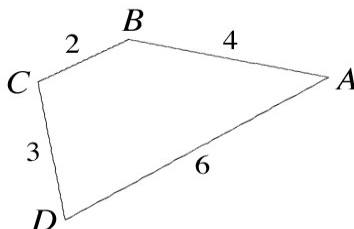
Alors, par symétrie,  $x_n = y_n$ . De plus

$$\left. \begin{array}{l} x_n = y_{n-1} + z_{n-1} \\ y_n = x_{n-1} + z_{n-1} \\ z_n = x_{n-1} + y_{n-1} \end{array} \right\} \text{ donc } \left\{ \begin{array}{l} x_n = x_{n-1} + z_{n-1} \\ z_n = 2x_{n-1}; \end{array} \right.$$

donc  $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$ . D'autre part,  $x_0 = 0 = \frac{2^0 + (-1)^1}{3}, x_1 = 1 = \frac{2^1 + (-1)^2}{3}$ . Il suffit donc de vérifier que  $\frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}$  satisfait la récurrence, ce qui se fait par un simple calcul algébrique.

### QUESTION 5 – Les côtés de l’heptagone

Par convention, nous dirons qu’un  $V$  dans un polygone est la figure formée par deux côtés adjacents du polygone. La longueur d’un  $V$  est définie par la somme des longueurs des côtés qui le composent. Par exemple, le quadrilatère  $ABCD$



possède les quatre  $V$  successifs suivants  $ABC$ ,  $BCD$ ,  $CDA$  et  $DAB$  (obtenus en parcourant son périmètre) de longueurs respectives 6, 5, 9 et 10. Déterminer la longueur de chaque côté d’un heptagone (= polygone ayant 7 côtés), sachant que les longueurs de ses  $V$  successifs sont  $4, \frac{9}{2}, \frac{5}{2}, 4, \frac{13}{2}, 6, \frac{9}{2}$ .

#### Esquisse de solution :

Soient  $x_1, x_2, \dots, x_7$  les longueurs des côtés successifs de l’heptagone. Il faut résoudre le système

$$x_1 + x_2 = 4 \tag{1}$$

$$x_2 + x_3 = \frac{9}{2} \tag{2}$$

$$x_3 + x_4 = \frac{5}{2} \tag{3}$$

$$x_4 + x_5 = 4 \tag{4}$$

$$x_5 + x_6 = \frac{13}{2} \tag{5}$$

$$x_6 + x_7 = 6 \tag{6}$$

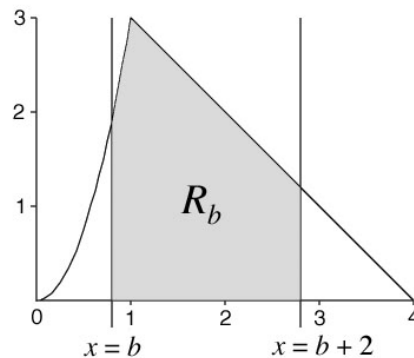
$$x_7 + x_1 = \frac{9}{2} \tag{7}$$

Notons que  $(1) - (2) + (3) - (4) + (5) - (6)$  fournit l'équation  $x_1 - x_7 = -\frac{3}{2}$ . En additionnant cette dernière équation et (7) on obtient  $2x_1 = 3$ , d'où  $x_1 = \frac{3}{2}$ ,  $x_2 = 4 - x_1 = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ ,  $x_3 = \frac{9}{2} - x_2 = \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = 2$ ,  $x_4 = \frac{5}{2} - x_3 = \frac{5}{2} - 2 = 1/2$ ,  $x_5 = 4 - x_4 = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ ,  $x_6 = \frac{13}{2} - x_5 = \frac{13}{2} - \frac{7}{2} = 3$ ,  $x_7 = 6 - x_5 = 6 - 3 = 3$ . Ainsi, les côtés sont  $x_1 = \frac{3}{2}$ ,  $x_2 = \frac{5}{2}$ ,  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = \frac{1}{2}$ ,  $x_5 = \frac{7}{2}$ ,  $x_6 = 3$ ,  $x_7 = 3$ .

### QUESTION 6 – Maximisons l'aire

Soit  $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{pour } 0 \leq x \leq 1, \\ 4 - x & \text{pour } 1 \leq x \leq 4. \end{cases}$

Soit  $R_b$  la région bordée par le graphe  $y = f(x)$ , l'axe des  $x$ , la droite verticale  $x = b$  et la droite verticale  $x = b + 2$ , où  $0 \leq b \leq 1$ . Trouver la valeur de  $b$  qui maximise l'aire de la région  $R_b$ .



### Esquisse de solution :

1) Soit  $A(b)$  l'aire de la région  $R_b$ .

$$\begin{aligned} A(b) &= \int_b^1 3x^2 dx + \int_1^{2+b} (4-x) dx = [x^3] \Big|_b^1 + \left[ 4x - \frac{x^2}{2} \right] \Big|_1^{2+b} \\ &= 1 - b^3 + 4(2+b-1) - \frac{1}{2}((2+b)^2 - 1) \\ &= 1 - b^3 + 4 + 4b - \frac{1}{2}(3 + 4b + b^2) = \frac{7}{2} + 2b - \frac{b^2}{2} - b^3 \\ A'(b) &= 2 - b - 3b^2 = (-3b + 2)(b + 1); \quad A''(b) = -1 - 6b \end{aligned}$$

La dérivée s'annule en  $b = \frac{2}{3}$  (et  $b = -1$ ), comme  $A''\left(\frac{2}{3}\right) = -5 < 0$ ; le maximum est en  $b = \frac{2}{3}$ .

- 2) Lorsqu'on passe de  $b_0$  à  $b_0 + \Delta$ , on perd un rectangle d'aire  $3b_0^2 \cdot \Delta$  et on en gagne un d'air  $(4 - (b_0 + 2))\Delta = (2 - b_0)\Delta$ . L'aire  $A(b)$  de la région  $R_b$  va donc augmenter tant que  $3b^2 < 2 - b$ , puis atteindre son maximum lorsque  $3b^2 = 2 - b$ , puis diminuer lorsque  $3b^2 > 2 - b$ . Lorsqu'on résout :  $3b^2 = 2 - b$ , on trouve  $b = \frac{2}{3}$ .

*Le concours collégial de l'AMQ (2005) était sous la responsabilité d'une équipe de l'UQAM formée de Jeanne Laporte-Jobin qui s'occupe de l'administration du concours et de Gilbert et Jacques Labelle qui se chargent du questionnaire, du solutionnaire et de la correction..*

*L'AMQ remercie Jacques Labelle et son équipe ainsi que les responsables locaux du concours dans les collèges. Enfin, l'AMQ tient à remercier les étudiantes et les étudiants de leur participation et les félicite de leurs succès.*

<b>Résultats du concours 2005 – Ordre collégial</b>		
<b>Position</b>	<b>Nom</b>	<b>Institution</b>
1	GE, Yin	Collège Marianopolis
2	FILIP, Ioan	Collège Marianopolis
3	BÉRUBÉ, Nicolas	CEGEP Bois-de-Boulogne
4	PRZYBYTKOWSKI, Karol	Collège Marianopolis
5	VIEL, Simon	Collège Champlain-St. Lawrence
6	XING, Shuo	Collège Marianopolis
7	MÉNARD, Pierre-Alexandre	CEGEP Bois-de-Boulogne
8	CHENG, Matthieu	Collège Marianopolis
9 à 11	LAVOIE, Guillaume	CEGEP Bois-de-Boulogne
9 à 11	MATENINE, Dmitri	Collège international des Marcellines
9 à 11	BOURGEOIS, Mathieu	Collège Montmorency
12	CHEA, Samkol	Collège Vanier
13	RAYMOND, Anne	Collège André-Grasset
14	SAVARD, Bruno	CEGEP Saint-Jean-sur-Richelieu
15 à 21	FORTIN, Simon	CEGEP de Chicoutimi
15 à 21	BELLEFLEUR, Raphaël	CEGEP Saint-Jean-sur-Richelieu
15 à 21	BROWN, Thomas	CEGEP Saint-Jean-sur-Richelieu
15 à 21	ATOYAN, Tigran	Collège Marianopolis
15 à 21	PATEL, Dipti Ramesh	Collège Marianopolis
15 à 21	VILLEMAIRE-KRAJDEN, Jonathan	Collège régional Champlain- St-Lambert
15 à 21	WANG, Ruiqing	Collège Vanier
22 à 25	JUSTAFORT, Valérie Danielle	Collège André-Grasset
22 à 25	GOLDENBERG, Yevgeniy	Collège Marianopolis
22 à 25	HE, Yifan	Collège Marianopolis
22 à 25	SOKOLNICKI, MichaPel	Collège Marianopolis
26 à 28	AUMOND-BEAUPRÉ, Jessé	CEGEP de l'Abitibi-Témiscamingue
26 à 28	HARVEY-COLLARD, Patrick	Collège de Sherbrooke
26 à 28	EL KHALIL, Eddy	Collège Marianopolis
29 à 31	MAREK, Jonah	Collège Champlain-St. Lawrence
29 à 31	WILSON, William	Collège de Lévis-Lauzon
29 à 31	ORTAN, Alexandra	Collège Vanier