

## Carrés magiques : une construction géométrique

JULIEN CONSTANTIN  
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

C'est une idée bien ancienne que celle des carrés magiques. Et certains les ont crus vraiment magiques : dans une salle consacrée à la médecine dans un musée du Caire, j'ai vu deux récipients servant à la préparation de médicaments et au fond desquels on avait représenté un carré magique d'ordre 4, peut-être à des fins de purification. Plus près de nous, en plusieurs occasions, chez des jeunes et des moins jeunes, et aussi sur Internet, j'ai vu présenter bien des recettes pour fabriquer des carrés magiques. Quand je demandais pourquoi ça marchait, j'obtenais rarement une réponse, comme si, pour certains, c'était vraiment de la magie... C'est ce qui me pousse à écrire le présent texte où je présente une construction en bonne partie connue qui a l'avantage de s'expliquer simplement par des propriétés géométriques élémentaires de droites et de parallèles, et de fournir en plus une multitude de carrés panmagiques.

Voici des carrés magiques d'ordre 3, 4 et 5 :

3	8	1					
2	4	6					
7	0	5					
			5	8	3	14	
			15	2	9	4	
			10	7	12	1	
			0	13	6	11	
			17	9	21	13	0
			11	3	15	7	24
			5	22	14	1	18
			4	16	8	20	12
			23	10	2	19	6
A1			A2			A3	

Fig 1

Un carré **semi-magique** d'ordre  $n$  est formé des nombres  $0, 1, 2, 3, \dots, n^2 - 2, n^2 - 1$  disposés dans les cases d'un carré de côté  $n$  en sorte que toutes les lignes et toutes les colonnes aient la même somme. Si, de plus, les deux diagonales ont cette même somme, on dit que le carré est **magique**. Cette somme  $S_n$ , la **somme magique**, est facile à calculer, puisqu'il

s'agit de répartir également sur  $n$  lignes la valeur  $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n^2 - 1 = n^2(n^2 - 1)/2$ . On a donc  $S_n = n(n^2 - 1)/2$ . Il n'est pas évident que de tels carrés existent pour tout entier  $n \geq 3$ . On peut même corser le problème et considérer les diagonales brisées. Dans le carré A3, par exemple, les nombres 5, 3, 21, 19 et 12 forment une diagonale montante brisée  $3 + 2$  tandis que les nombres 9, 15, 1, 12, et 23 forment une diagonale descendante brisée  $4 + 1$ . Si les  $2n - 2$  diagonales brisées d'un carré magique ont aussi la somme magique, le carré est dit **pandiagonal** ou **panmagique**. C'est le cas de A3, mais non de A2. Les carrés panmagiques ont une propriété amusante : si on pave le plan avec des reproductions d'un carré panmagique d'ordre  $n$ , et qu'on découpe n'importe où dans le plan une fenêtre de côté  $n$ , elle fait apparaître un carré panmagique.

Nous exposerons une construction de carrés magiques qui repose essentiellement sur deux faits élémentaires :

1. La règle de la division : Si  $a$  et  $n$  sont des entiers naturels, alors il existe des entiers  $q$  et  $r$ , appelés le quotient et le reste, uniquement déterminés, tels que  $a = nq + r$  et  $r \in [n] = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ .

Pour  $n$  fixé, cela signifie en particulier que l'application  $a = nq + r \longrightarrow (q, r)$  de  $[n^2] = \{0, 1, 2, \dots, n^2 - 1\}$  vers  $[n] \times [n]$  est une bijection. Cela permet aussi de définir sur  $[n]$  une structure d'anneau obtenue en remplaçant le résultat des opérations  $+$  et  $\times$  vues dans  $\mathbf{Z}$  par leur reste après division par  $n$ . C'est afin d'utiliser cette bijection et cet anneau, noté  $\mathbf{Z}_n$  et appelé anneau des entiers modulo  $n$ , que dans les carrés magiques nous faisons commencer les nombres à 0 plutôt qu'à 1, comme c'est le cas traditionnellement.

2. La notion de parallélisme : dans un plan, l'ensemble des droites d'une direction donnée partitionne ce plan et deux droites de direction différentes ont un seul point commun.

## 1 Les carrés auxiliaires

À tout carré magique  $C$  d'ordre  $n$ , on peut associer deux carrés auxiliaires  $C_1$  et  $C_2$ , ceux des quotients et des restes obtenus en divisant les éléments de  $C$  par  $n$ . Voici les carrés auxiliaires associés au carré A3 ci-dessus (fig. 2a).

3	1	4	2	0
2	0	3	1	4
1	4	2	0	3
0	3	1	4	2
4	2	0	3	1

$C_1$

2	4	1	3	0
1	3	0	2	4
0	2	4	1	3
4	1	3	0	2
3	0	2	4	1

$C_2$

3,2	1,4	4,1	2,3	0,0
2,1	0,3	3,0	1,2	4,4
1,0	4,2	2,4	0,1	3,3
0,4	3,1	1,3	4,0	2,2
4,3	2,0	0,2	3,4	1,1

$C_1, C_2$

Fig 2a Fig. 2b

Quelles propriétés ont ces carrés auxiliaires? Ils sont formés des éléments de  $[n]$ , chacun apparaissant le même nombre de fois. De plus, à cause de la bijection mentionnée précédemment, ils sont **orthogonaux**, c'est-à-dire, que si on les superpose, chaque couple  $(x, y) \in [n] \times [n]$  apparaît exactement une fois (voir fig. 2b). Ils permettent de retrouver facilement le carré  $C$  puisque  $nC_1 + C_2 = C$ . Mais attention! En faisant  $nD_1 + D_2$  avec deux carrés orthogonaux  $D_1$  et  $D_2$  d'éléments de  $[n]$ , on n'obtient pas nécessairement un carré magique. Cependant l'énoncé suivant se vérifie aisément.

**Proposition 1** Soit  $C_1$  et  $C_2$  des carrés de côté  $n$  formés d'éléments de  $[n]$ , alors si

- a)  $C_1$  et  $C_2$  sont orthogonaux, et si
  - b)  $C_1$  et  $C_2$  sont de somme constante : la somme des éléments de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale de  $C_1$  et de  $C_2$  est égale à  $T_n = 0+1+2+3+\dots+n-1 = n(n-1)/2$ ,
- alors  $nC_1 + C_2 = C$  est un carré magique.

La première condition assure, en vertu de la bijection mentionnée en 1), que tous les éléments de  $[n^2]$  apparaissent exactement une fois dans  $C$ ; la seconde condition assure que chaque ligne, colonne et diagonale de  $C$  a comme somme  $nT_n + T_n = (n+1)n(n-1)/2 = S_n$ . Notons que la seconde condition est réalisée pour les lignes et les colonnes de  $C_i$  si  $C_i$  est un **carré latin**, c'est-à-dire si tous les éléments de  $[n]$  apparaissent dans chaque ligne et chaque colonne de  $C_i$ . Les carrés de la fig. 2a sont latins.

## 2 Une construction géométrique de carrés magiques

Il s'agit d'assurer les conditions a) et b) ci-dessus à partir de propriétés géométriques des droites. Appelons **faisceau** un ensemble de  $n$  droites parallèles. Si on établit une bijection quelconque entre un faisceau  $F$  et  $[n]$ , on **étiquette** ainsi chacune des droites de  $F$  avec

un entier ; on dira que le faisceau est **étiqueté**. Soit  $F_1$  et  $F_2$  des faisceaux étiquetés et de directions différentes, alors les  $n^2$  points d'intersection entre toutes ces droites peuvent être repérés par des couples  $(x, y)$ , **tous distincts**, où  $x$  désigne la droite de  $F_1$  et  $y$  celle de  $F_2$  auxquelles le point appartient (Fig. 3, où l'on a indiqué les points  $(4,0)$  et  $(4,3)$ ). Notons que si, en parcourant une de ces droites, on additionne les coordonnées des droites que l'on croise, on obtient toujours la même somme  $T_n$ . Fondamentalement, on a la situation de carrés orthogonaux à somme constante que réclame la proposition 1.

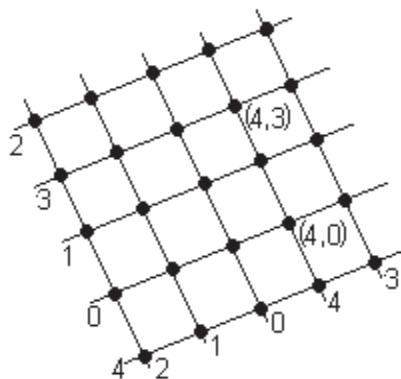


Fig. 3

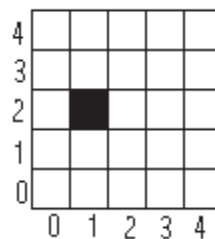


Fig. 4

C'est ce qui nous amène à considérer un carré d'ordre  $n$  comme un **plan**, chacune des  $n^2$  cases étant un **point** de ce plan ; les lignes et les colonnes forment justement les éléments de deux faisceaux de droites, qu'on étiquette au moyen de bijections avec  $[n]$  comme dans le paragraphe précédent ; on obtient ainsi un système de coordonnées (Voir par exemple la figure 4, où, avec  $n = 5$ , on a utilisé les bijections les plus naturelles et indiqué le point de coordonnées  $(1, 2)$ ). On peut interpréter les lignes comme étant les droites de pente 0 et les colonnes comme celles de pente  $\infty$ . Pour obtenir les autres droites, nous utiliserons les équations bien connues de la forme  $y = mx + b$ , où  $y, m, x, b$  désignent des éléments de  $\mathbf{Z}_n$  et où  $m$  s'appelle la pente et  $b$  l'ordonnée à l'origine.

Les droites d'équation  $y = mx + b$  ont toujours  $n$  points puisque  $x$  parcourt  $\mathbf{Z}_n$ . Il y a  $n$  droites de pente  $m$ , obtenues avec les diverses valeurs de  $b \in \mathbf{Z}_n$ , et elles forment un faisceau qui couvre le plan. Enfin, il y a  $n + 1$  pentes différentes, si l'on compte la pente  $\infty$ . C'est ce qu'on appelle un **plan affine** d'ordre  $n$  lorsque  $n$  est premier. La figure 5a montre la droite  $D$  d'équation  $y = 2x + 1$  dans le plan d'ordre 5, la lettre  $a$  indiquant les 5 points de la droite  $D = \{(0, 1), (1, 3), (2, 0), (3, 2), (4, 4)\}$ . Notez que si l'on identifie, d'une part, le bord gauche et le bord droit du carré et, d'autre part, le bord supérieur et le bord inférieur, le carré peut

aussi être vu comme un **tore** et qu'on peut facilement trouver les points de la droite sans faire de calcul : il suffit, partant d'un point quelconque de la droite, d'avancer d'un carré vers la droite et de monter de deux, ce qui correspond à la pente 2. La figure 5b indique toutes les droites de pente 2, les points marqués de la même lettre appartenant à la même droite. On a ainsi **étiqueté** le faisceau des droites de pente 2 avec les lettres  $a, b, c, d, e$  en attribuant la même lettre à deux points du plan précisément s'ils appartiennent à la même droite du faisceau. On remarquera aussitôt que le carré obtenu est le même que le carré  $C_1$  de la figure 2, si on pose  $a = 0, b = 1, c = 2, d = 3, e = 4$ . De même, la figure 5c montre le faisceau étiqueté des droites de pente 3. En y faisant  $a = 3, b = 4, c = 0, d = 1, e = 2$ , on obtient le carré  $C_2$  de la figure 2. Et  $5C_1 + C_2$  nous donne le carré magique A3.

4				$a$	
3		$a$			
2				$a$	
1	$a$				
0			$a$		
	0	1	2	3	4

Fig. 5a

4	$d$	$b$	$e$	$c$	$a$
3	$c$	$a$	$d$	$b$	$e$
2	$b$	$e$	$c$	$a$	$d$
1	$a$	$d$	$b$	$e$	$c$
0	$e$	$c$	$a$	$d$	$b$
	0	1	2	3	4

Fig. 5b

4	$e$	$b$	$d$	$a$	$c$
3	$d$	$a$	$c$	$e$	$b$
2	$c$	$e$	$b$	$d$	$a$
1	$b$	$d$	$a$	$c$	$e$
0	$a$	$c$	$e$	$b$	$d$
	0	1	2	3	4

Fig. 5c

Ainsi, dans cet exemple, à chaque faisceau étiqueté de droites de pente convenable, on a pu associer un carré à somme constante, et deux faisceaux différents nous ont fourni un carré magique grâce à une formule simple. C'est ce procédé de construction de carrés magiques à partir de faisceaux étiquetés de pentes différentes que nous allons maintenant justifier. Généralisons un peu en considérant non seulement le plan  $\mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_n$  que nous venons de définir, mais un plan  $\mathbf{A}_n \times \mathbf{A}_n$ , où  $\mathbf{A}_n$  est un anneau commutatif à  $n$  éléments. Comme précédemment, dans ce plan représenté par un carré de côté  $n$ , les colonnes sont les droites de pente  $\infty$ , les lignes les droites de pente 0, les autres droites étant données par les équations de la forme  $y = mx + b$ , où  $m, b, x, y$  sont dans  $\mathbf{A}_n$ .

Soit les droites  $D_1 : y = m_1x + b_1$  et  $D_2 : y = m_2x + b_2$ . On vérifie très aisément les points suivants :

- 1)  $D_i$  rencontre chaque droite de pente  $\infty$  exactement une fois.
- 2) si  $m_1 = m_2$ , alors  $D_1 = D_2$  ou  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ , suivant que  $b_1 = b_2$  ou non.
- 3) si  $m_1 - m_2$  est inversible dans  $\mathbf{A}_n$ , alors  $D_1 \cap D_2$  est un singleton.

**Proposition 2** Soit  $C_i$  un carré obtenu en étiquetant le faisceau des droites de pente  $m_i$ , pour  $i = 1, 2$ ; alors

- a) si  $m_1 - m_2$  est inversible dans  $\mathbf{A}_n$ , les carrés  $C_1$  et  $C_2$  sont orthogonaux;
- b) si  $m_i$  est inversible dans  $\mathbf{A}_n$ , le carré  $C_i$  est un carré latin;
- c) si une diagonale du carré  $C_i$  est une droite de pente  $d$  dans le plan  $\mathbf{A}_n \times \mathbf{A}_n$  et  $m_i - d$  est inversible, alors  $C_i$  est orthogonal au carré  $C_3$  obtenu en étiquetant le faisceau des droites de pente  $d$ ; cela assure que les points de chaque droite de pente  $d$  ont des étiquettes toutes distinctes dans  $C_i$ .

Il en découle que si  $m_1, m_2$  et  $m_1 - m_2$  sont inversibles dans  $\mathbf{A}_n$ , le carré  $C = nC_1 + C_2$  est semi-magique. Si de plus les diagonales sont des droites de pente  $d_1$  et  $d_2$ , et si  $m_1 - d_1, m_1 - d_2, m_2 - d_1$  et  $m_2 - d_2$  sont inversibles, alors  $C$  est magique.

**Démonstration.** Pour a), si les carrés n'étaient pas orthogonaux, un couple  $(x, y)$  apparaîtrait deux fois, ce qui voudrait dire qu'une droite de pente  $m_1$  rencontrerait une droite de pente  $m_2$  en deux points. En appliquant a) avec  $m_2 = 0$  ou  $d$ , on obtient b) et c).

Appliquons ce qui précède au cas  $\mathbf{A}_n = \mathbf{Z}_n$ . Pour simplifier alors, nous supposons que les coordonnées sont placées de la même façon sur les deux axes et dans l'ordre  $0, 1, 2, \dots, n-1$ , comme dans la figure 4, par exemple. Cela assure que toutes les diagonales montantes, brisées ou non, sont des droites de pente 1 et toutes les diagonales descendantes des droites de pente -1.

**Proposition 3** Si  $m_1, m_2$  et  $m_1 - m_2$  sont inversibles dans  $\mathbf{Z}_n$ , et si  $C_1$  et  $C_2$  sont des carrés obtenus au moyen des faisceaux étiquetés par  $[n]$  des droites de pente  $m_1$  et  $m_2$ , le carré  $C = nC_1 + C_2$  est semi-magique. Si de plus  $m_1 \pm 1, m_2 \pm 1$  sont inversibles, alors  $C$  est panmagique.

**Démonstration.** Il s'agit d'une application immédiate des propositions 1 et 2 ci-dessus.

On dira qu'un carré semi-magique est **affine** s'il est de la forme  $nC_1 + C_2$ , où  $C_1$  et  $C_2$  sont les carrés des faisceaux étiquetés par  $[n]$  des droites de pente  $m_1$  et  $m_2$  prises dans un anneau commutatif  $\mathbf{A}_n$ . Suivant la proposition précédente, si  $n \geq 5$  est premier, alors il existe un carré panmagique affine d'ordre  $n$ , car tous les éléments non nuls de  $\mathbf{Z}_n$  sont inversibles. Le carré A3 de la figure 1 en est un exemple. Plus généralement, si  $n$  est impair

et non divisible par 3, alors avec  $m_1 = 2$  et  $m_2 = 3$ , on a que  $m_1, m_2, m_1 - m_2, m_1 \pm 1, m_2 \pm 1$  sont inversibles dans  $\mathbf{Z}_n$ , et donc :

*Si  $n$  est impair et non divisible par 3, il existe un carré panmagique affine d'ordre  $n$ .*

### 3 Quelques exemples avec l'anneau $\mathbf{Z}_n$

En utilisant les résultats précédents dans l'anneau  $\mathbf{Z}_9$ , nous allons construire un panmagique affine d'ordre 9 (voir la figure 7), puis montrer comment en obtenir d'ordre  $n = 15, 21, 27$ , etc., où  $n$  est impair et divisible par 3.

Avec  $m_1 = 4$  et  $m_2 = 5$ , on a que  $m_1, m_2$  et  $m_1 - m_2$  sont inversibles dans  $\mathbf{Z}_9$ . (Il est impossible d'y trouver un  $m$  tel que  $m$  et  $m \pm 1$  soient inversibles.) Les carrés  $C_1$  et  $C_2$  de la figure 6 représentent les faisceaux étiquetés des droites de pente 4 et 5. Dans les deux cas, on a étiqueté les points de la droite  $y = mx + b$  avec le symbole  $\bar{b}$ , pour suivre aisément ce qui se passe.

En vertu de la proposition précédente, le carré  $C = nC_1 + C_2$  sera semi-magique sitôt que nous aurons donné des valeurs à  $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{7}, \bar{8}$  en sorte que  $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{7}, \bar{8}\} = [9]$ . Il y a là une liberté de choix dont nous profiterons maintenant. Pour que le carré final soit panmagique, il nous suffit d'arriver à ce que toutes les diagonales, montantes ou descendantes, brisées ou non, aient comme somme  $T_9 = 0 + 1 + 2 + \dots + 8 = 36$ . Cela est automatiquement vérifié pour toutes les diagonales descendantes de  $C_1$ , car dans chacune d'elle toutes les étiquettes sont distinctes. On le savait puisque  $m_1 + 1 = 5$  est inversible dans  $\mathbf{Z}_9$ . Il en est de même pour les diagonales montantes de  $C_2$ . Par ailleurs, les diagonales montantes de  $C_1$  nous fournissent 9 équations :

$$\begin{array}{ll} \text{La diagonale principale } 9 + 0 : & 3(\bar{0} + \bar{3} + \bar{6}) = 36 \\ \text{Une diagonale brisée } 8 + 1 : & 3(\bar{1} + \bar{4} + \bar{7}) = 36 \\ \text{Une diagonale brisée } 7 + 2 : & 3(\bar{2} + \bar{5} + \bar{8}) = 36 \end{array} \quad (*)$$

Les équations suivantes répètent celles que nous avons déjà. Toutes ces équations se ramènent à trois :

$$\begin{array}{l} \bar{0} + \bar{3} + \bar{6} = 12 \\ \bar{1} + \bar{4} + \bar{7} = 12 \\ \bar{2} + \bar{5} + \bar{8} = 12 \end{array}$$

Il s'agit en somme de partitionner [9] en 3 sous-ensembles de 3 éléments et de somme 12. Une solution est  $\bar{0} = 0, \bar{1} = 2, \bar{2} = 3, \bar{3} = 7, \bar{4} = 4, \bar{5} = 1, \bar{6} = 5, \bar{7} = 6, \bar{8} = 8$ . Un fin observateur verra ici les lignes du carré magique A1!

$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{3}$
$\bar{7}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$
$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$
$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$
$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
0	1	2	3	4	5	6	7	8

$C_1$

$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$
$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$
$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$
$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$
$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\bar{7}$
$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$
0	1	2	3	4	5	6	7	8

$C_2$

Fig. 6

On refait la même chose avec le carré  $C_2$ , mais cette fois avec les diagonales descendantes ; il se trouve, et ce n'est pas un hasard, que l'on obtient ici les mêmes équations et donc on peut, si on le veut, prendre pour  $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{8}$  les mêmes valeurs. Et alors  $C = 9C_1 + C_2$  donne le carré panmagique d'ordre 9 montré à la figure 7.

80	43	6	12	23	47	28	54	67
60	66	77	38	1	9	22	53	34
50	29	55	63	76	44	7	15	21
10	18	49	35	61	69	75	41	2
40	8	16	24	48	32	56	64	72
70	78	39	5	11	19	45	31	62
30	59	65	73	36	4	17	25	51
20	46	27	58	71	79	42	3	14
0	13	26	52	33	57	68	74	37

Fig. 7

L'écriture et la résolution des équations permettant d'assurer la panmagicité requièrent un certain travail. Les propositions suivantes le simplifient beaucoup.

**Proposition 4** *Soit  $A$  un anneau commutatif à  $n$  éléments et  $m, d \in A$  et  $D_1$  et  $D_2$  des droites du plan  $A \times A$  d'équations  $D_1 : y = mx + b$  et  $D_2 : y = dx + a$ . Alors  $D_1$  et  $D_2$  se rencontrent si et seulement si  $b - a = k(m - d)$ , où  $k \in A$ , (les algébristes disent que  $b - a$  est dans l'idéal de  $A$  engendré par  $m - d$ ).*



**Démonstration.** Si  $(x_1, y_1)$  est point de rencontre, alors  $mx_1 + b = dx_1 + a$ , ce qui équivaut à  $(m - d)(-x_1) = b - a$  et ainsi  $b - a$  est multiple de  $m - d$ . La réciproque est aussi directe.

En particulier lorsque  $A = \mathbf{Z}_n$ , avec  $n = ur$ ,  $m - d = us$  et  $\text{P.G.C.D.}(r, s) = 1$ , les droites d'équation  $y = mx + b$  qui rencontrent la droite  $D_2$  d'équation  $y = dx + a$  sont précisément celles où  $b - a = k(m - d)$ , avec  $k = 0, 1, \dots, r - 1$ . Il y en a exactement  $r$  et chacune d'elles rencontre  $D_2$  exactement  $u$  fois. En effet, si  $mx + b = dx + a$ , alors  $m(x + r) + b = mx + b + dr + (m - d)r = dx + a + dr + usr = d(x + r) + a + 0$ , puisque  $usr = ns = 0$ , modulo  $n$ ; ce qui signifie que, si  $x$  est l'abscisse d'un point de rencontre, alors  $x + r$  aussi, de même  $x + 2r, \dots, x + (u - 1)r$ . On en tire aussitôt la proposition suivante.

**Proposition 5** *Soit  $n = ur$  et  $m - d = us$  avec  $\text{P.G.C.D.}(r, s) = 1$ . Si dans le plan  $\mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_n$  on étiquette chaque point de la droite d'équation  $y = mx + b$  avec  $\bar{b}$ , alors la somme des étiquettes apparaissant sur la droite  $D_2 : y = dx + a$  est  $u(\bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \dots + \bar{b}_r)$ , où  $b_i$ , avec  $i = 1, 2, \dots, r$ , désigne les différents éléments de  $\mathbf{Z}_n$  de la forme  $k(m - d) + a$ . En parcourant les différentes droites parallèles à  $D_2$ , on obtient  $u$  telles sommes.*

En effet, ces sommes partitionnent les étiquettes et chaque somme en contient  $r$ .

Si on revoit l'exemple précédent avec  $\mathbf{Z}_9$ , on a, par exemple,  $u = 3$ ,  $r = 3$ ,  $m - d = 4 - 1 = 3$  et  $s = 1$  : la proposition précédente nous donne directement le système d'équations (\*). Généralisons à l'anneau  $\mathbf{Z}_n$ , où  $n = 3r$  avec  $r$  impair non multiple de 5 et les pentes  $m_1 = 2$  et  $m_2 = 4$ ; comme  $m_1, m_2, m_2 - m_1, m_1 - 1$  et  $m_2 + 1$  sont inversibles dans  $\mathbf{Z}_n$ , les carrés auxiliaires  $C_1$  et  $C_2$ , où on aura étiqueté les droites d'équation  $y = m_1x + b$  et  $y = m_2x + b$  avec les étiquettes  $\bar{b}$  pour suivre aisément ce qui se passe, seront presque impeccables : quelles que soient les valeurs données aux étiquettes, ils seront orthogonaux, de somme constante  $T_n = 0 + 1 + \dots + n - 1$  dans les lignes et les colonnes ainsi que dans les diagonales montantes de  $C_1$  et les diagonales descendantes de  $C_2$ . Quant aux diagonales descendantes de  $C_1$ , on doit théoriquement, pour s'assurer de la même somme, résoudre un système de  $n$  équations linéaires avec les étiquettes  $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n - 1}$ . La proposition précédente, avec  $d = -1$  et donc  $m_1 - d = 3$ , nous dit que cela se réduit à 3 équations de la forme  $3(\bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \dots + \bar{b}_r) = T_n$ , où  $b_i$  désigne les différents éléments de  $\mathbf{Z}_n$  congrus à  $a$  modulo 3, une équation pour chaque  $a = 0, 1, 2$ . De plus ces équations partitionnent les  $n$  étiquettes. On aura une solution convenable de ce système sitôt qu'on aura trouvé une partition de  $[n]$  en trois  $r$ -parties de somme  $S = T_n/3 = (n - 1)n/6 = (3r - 1)r/2$ . Voici comment on peut y arriver :

0	3	6	9	.....	$3r - 3$	cette ligne est de somme $S - r$
1	4	7	10	.....	$3r - 2$	cette ligne est de somme $S$
2	5	8	11	.....	$3r - 1$	cette ligne est de somme $S + r$

Le cas  $r = 3$  a été résolu dans l'exemple précédent. Autrement  $r \geq 5$  peut s'écrire  $r = 5 + 2t$  et chacune des trois lignes aura comme somme  $S$  si on échange 5 et 0 entre la première et la troisième ligne et si on échange  $t$  fois des nombres comme 6 et 8, ou 9 et 11, etc. entre ces deux lignes. On obtient ainsi une partition de  $[n]$  en trois classes de somme  $S$ . En mettant en bijection chacune de ces trois lignes avec les étiquettes d'une des trois équations à notre choix, on donnera des valeurs convenables aux  $n$  étiquettes et le carré  $C_1$  sera à somme constante aussi bien dans ses lignes, ses colonnes et toutes ses diagonales. Enfin, pour  $C_2$ , c'est facile : comme  $m_2 - 1$  vaut aussi 3, on obtient avec ses diagonales montantes les mêmes équations que pour  $C_1$  et la même partition de  $[n]$ , ou une autre analogue, est utilisable. Le carré  $nC_1 + C_2$  est alors panmagique. On pressent qu'il y a beaucoup de tels carrés : il y a  $3!$  façons d'associer les  $r$ -ensembles de la partition et les équations de  $C_1$ , autant pour celles de  $C_2$ ,  $r!$  façons d'attribuer chaque  $r$ -ensemble aux variables, etc. Sans compter qu'on pouvait choisir d'autres pentes, d'autres partitions de  $[n]$ , et même parfois, mais c'est plus délicat, des pentes non inversibles...

L'analyse qui précède permet de construire des carrés pandiagonaux d'ordre 9, 21, 27, 33, etc., mais laisse de côté des cas comme  $n = 3 \times 5 = 15$ . C'est que la pente 4 paraît moins convenir, car  $4+1$  n'est pas inversible dans  $\mathbf{Z}_{15}$ . En procédant de la même manière que précédemment mais avec les pentes 7 et 8, on obtient un carré pandiagonal d'ordre 15. On peut cependant préférer conserver les pentes 2 et 4 et réutiliser la proposition précédente avec  $u = 5$  cette fois : les diagonales descendantes de  $C_2$  fournissent 5 équations de la forme  $5(\overline{b_1} + \overline{b_2} + \overline{b_3}) = T_{15} = 15 \times 7$ , où  $b_1, b_2, b_3$  désignent les trois éléments de  $\mathbf{Z}_{15}$  congrus à un même élément modulo 5. Il reste à trouver une solution utilisant tout [15] du système formé de ces 5 équations et des 3 équations déjà rencontrées du type  $3(\overline{b_1} + \overline{b_2} + \overline{b_3} + \overline{b_4} + \overline{b_5}) = 15 \times 7$  venant des diagonales montantes. Voici deux tableaux :

0	13	5	9	8	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$	$\overline{9}$
7	2	12	11	3	$\overline{10}$	$\overline{1}$	$\overline{7}$	$\overline{13}$	$\overline{4}$
14	6	4	1	10	$\overline{5}$	$\overline{11}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{14}$

Le premier tableau est un rectangle magique : toutes les lignes ont même somme et toutes les colonnes également. Dans le second, on trouve en ligne  $i$  tous les éléments de  $\mathbf{Z}_{15}$  congrus à  $i \pmod 3$ , et en colonne  $j$  les éléments congrus à  $j \pmod 5$ . En donnant aux étiquettes  $\bar{b}$  du second tableau la valeur correspondante dans le premier tableau, on obtient un carré panmagique d'ordre 15. (On trouvera dans Descombes [1] un bref chapitre sur la construction des rectangles magiques.)

#### 4 Méthode dite de La Loubère (1693)

Cet ambassadeur de Louis XIV au Siam rapporta en Europe une méthode de construction facile et très populaire que D. N. Lehmer généralisa en 1929 [2]. La forme générale utilise trois couples fixes d'éléments de  $\mathbf{Z}_n$  : le pas  $(a, b)$ , le saut  $(c, d)$  et le point de départ  $(e, f)$  dans le plan  $\mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_n$ , toujours interprété comme un tore. Avec comme système de coordonnées les éléments  $0, 1, 2, \dots, n - 1$  de  $\mathbf{Z}_n$ , placés dans l'ordre usuel, on inscrit 0 dans la case  $(e, f)$ . C'est le point de départ. Faisant le pas  $(a, b)$ , on place 1 dans la case  $(e + a, f + b)$ , puis 2 dans la case  $(e + 2a, f + 2b)$ , et ainsi de suite. On s'arrête à la case  $(e + (n - 1)a, f + (n - 1)b)$ , car la suivante  $(e + na, f + nb) = (e, f) \pmod n$  est déjà occupée. On se rend plutôt à la case  $(e + (n - 1)a + c, f + (n - 1)b + d)$ , faisant ainsi un saut  $(c, d)$  et on y inscrit  $n$ . Puis, comme au début, on fait le pas  $(a, b)$  pour mettre  $n + 1$  dans la case  $(e + na + c, f + nb + d)$ , puis de nouveau le pas  $(a, b)$  pour placer  $n + 2$ , et ainsi de suite. Chaque fois que l'on risque d'atteindre une case déjà occupée, on fait plutôt le saut  $(c, d)$ . Lorsque certaines conditions sur  $a, b, c, d, e, f$  sont satisfaites (voir, par exemple, Descombes [1]), le carré rempli de cette façon est magique. La figure 8 donne un exemple d'un carré  $C$  construit par cette méthode, avec  $(e, f) = (3, 2)$ ,  $(a, b) = (1, 2)$  et  $(c, d) = (-1, 1)$ .

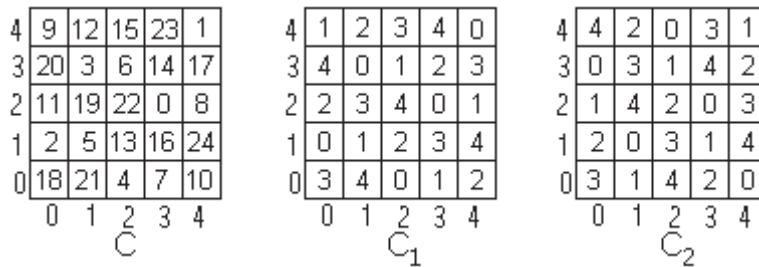


Fig. 8

Cette figure 8 donne aussi les carrés auxiliaires  $C_1$  et  $C_2$  des quotients et des restes de la division de  $C$  par 5. On constate immédiatement que  $C_1$  est le carré étiqueté des droites de pente  $2 = 2 \times 1^{-1}$  et que  $C_2$  est celui des droites de pente  $3 = 1 \times 2^{-1}$  (dans  $\mathbf{Z}_5$ ). L'une des pentes est donnée par le pas  $(1, 2)$  et l'autre par la différence entre le pas et le saut  $(1, 2) - (-1, 1) = (2, 1)$ . En effet, un peu de réflexion montre que la case marquée du nombre  $v = sn + k$ , avec  $0 \leq k < n$ , est à la position  $p_v = (e + ka + s(c - a), f + kb + s(d - b))$ . Or la case marquée  $u = sn + 0$  a même quotient que  $v$  dans la division par  $n$  et on a  $p_v - p_u = k(a, b)$ . Cela signifie que toutes les cases marquées d'un nombre ayant même quotient que  $u$  dans la division par  $n$  sont sur la même droite de vecteur directeur  $(a, b)$ . De même, la case marquée du nombre  $u = 0 \times n + k$  a même reste que  $v$  dans la division par  $n$  et on a  $p_v - p_u = s(c - a, d - b)$ . Cela signifie que toutes les cases marquées d'un nombre ayant même reste que  $u$  dans la division par  $n$  sont sur la même droite de vecteur directeur  $(c - a, d - b)$  que  $u$ . Ainsi, la méthode de La Loubère est essentiellement un cas particulier de la méthode des carrés affines exposée ici.

## 5 Où l'on utilise d'autres anneaux que $\mathbf{Z}_n$

Dans cette section, nous construirons des carrés magiques d'ordre 4, 8, 12, etc., en utilisant les corps finis  $F_4$ ,  $F_8$  et des anneaux produits. Soulignons que la méthode des carrés affines laisse plusieurs "degrés de liberté" dans la construction d'un carré d'ordre  $n$  : choix de l'anneau des coordonnées, de leur positionnement le long des axes, choix des pentes et choix de l'étiquetage des droites. Nous n'avons pas utilisé les deux premières libertés et il y a une limitation sérieuse à se restreindre à  $\mathbf{Z}_n$  : lorsque  $n$  est pair, on ne peut pas trouver  $m_1$  et  $m_2$  tels que  $m_1, m_2$  et  $m_1 - m_2$  soient inversibles : au moins un de ces trois entiers doit être pair. Par ailleurs avec d'autres anneaux que  $\mathbf{Z}_n$  et sans précautions supplémentaires, il n'est généralement pas vrai que la diagonale descendante soit une droite de pente -1, ni même simplement une droite, ni que les diagonales descendantes brisées lui soient parallèles...

Cherchons par exemple à former un carré magique affine d'ordre 4 en utilisant le corps  $F_4 = \{0, 1, \alpha, \alpha^2\}$ , où  $\alpha^2 = \alpha + 1$ ,  $\alpha^3 = 1$ ,  $1 + 1 = \alpha + \alpha = 0$ . Voici les carrés étiquetés des droites de pente 1,  $\alpha$ ,  $\alpha^2$  respectivement (les seules pentes disponibles).

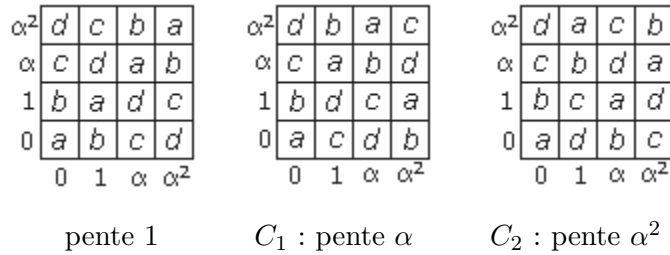


Fig. 9

Le carré des droites de pente 1 est révélateur : les deux diagonales principales sont des droites de pente 1, ce qui n'a rien d'étonnant puisque  $1 = -1$ . Il en est de même pour les deux diagonales brisées  $2 + 2$ . Mais les 4 autres diagonales brisées ne sont même pas des droites. On ne voit pas comment utiliser ce carré puisqu'on ne peut arriver à obtenir  $6 = 0 + 1 + 2 + 3$  en additionnant les éléments dans chaque diagonale : il faudrait  $4a = 6$  et  $4d = 6$ , ce qui est impossible dans les entiers.

Les carrés  $C_1$  et  $C_2$  des droites de pente  $\alpha$  et  $\alpha^2$ , par contre, nous conviendront parfaitement. Puisque  $\alpha, \alpha^2$  et  $\alpha - \alpha^2$  sont inversibles dans  $F_4$ , en donnant des valeurs à  $a, b, c, d$  de sorte que  $\{a, b, c, d\} = [4]$ , on est assuré que  $4C_1 + C_2$  sera un carré magique. Mais on peut faire mieux si les sommes des éléments sur les 4 diagonales qui ne sont pas des droites sont égales à 6. Pour cela, dans  $C_1$ , il nous faut  $c + d = 3$  et  $a + b = 3$ . Prenons donc  $a = 0, b = 3, c = 1$  et  $d = 2$ . De même, dans  $C_2$ , les diagonales brisées qui ne sont pas des droites nous donnent les équations  $a + d = 3$  et  $b + c = 3$ . On peut prendre pour solutions  $a = 1, b = 3, c = 0$  et  $d = 2$ . On obtient alors le carré panmagique  $A4 = 4C_1 + C_2$ . La figure 10 donne  $C_1, C_2$  et  $A4$ .

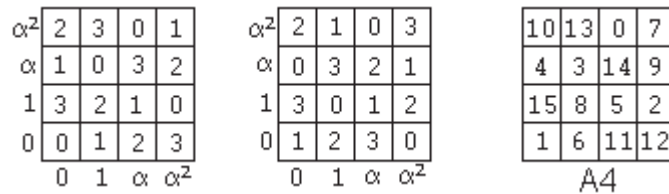


Fig. 10

Et pourquoi pas maintenant un carré panmagique d'ordre 8 ? Prenons le corps  $F_8 = \{0, 1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6\}$ , où  $\alpha^3 = \alpha + 1, \alpha^7 = 1$  et où  $x + x = 0$ , pour tout  $x$ . La figure 11 montre le carré des droites de pente 1. Comment avons-nous placé les coordonnées ? En mettant 0 et  $\alpha^6$  aux deux extrémités des axes de coordonnées, la diagonale descendante pourrait avoir l'équation  $y = -x + \alpha^6$  ; cela suggère de partitionner  $F_8$  en 4 classes de

deux éléments de somme  $\alpha^6$ , par exemple  $\alpha + \alpha^5 = \alpha^6$  ou  $\alpha^3 + \alpha^4 = \alpha^6$ , puis de placer les éléments de ces paires symétriquement par rapport au milieu des axes. Les points de chaque droite de pente 1 étant identifiés par une même lettre, on voit immédiatement que les deux diagonales, indiquées respectivement par des  $a$  et des  $h$ , sont des droites de pente 1. Les deux diagonales brisées 4+4 sont aussi des droites de pente 1, alors que ce n'est pas le cas pour les 12 autres.

$\alpha^6$	$h$	$g$	$f$	$e$	$d$	$c$	$b$	$a$
$\alpha^5$	$g$	$h$	$e$	$f$	$c$	$d$	$a$	$b$
$\alpha^4$	$f$	$e$	$h$	$g$	$b$	$a$	$d$	$c$
$\alpha^2$	$e$	$f$	$g$	$h$	$a$	$b$	$c$	$d$
1	$d$	$c$	$b$	$a$	$h$	$g$	$f$	$e$
$\alpha^3$	$c$	$d$	$a$	$b$	$g$	$h$	$e$	$f$
$\alpha$	$b$	$a$	$d$	$c$	$f$	$e$	$h$	$g$
0	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$
	0	$\alpha$	$\alpha^3$	1	$\alpha^2$	$\alpha^4$	$\alpha^5$	$\alpha^6$

Fig. 11

Les figures 12a et 12b montrent les droites de pente  $m_1 = \alpha$  et  $m_2 = \alpha^3$  respectivement.

$\alpha^6$	$h$	$d$	$c$	$g$	$f$	$b$	$a$	$e$
$\alpha^5$	$g$	$c$	$d$	$h$	$e$	$a$	$b$	$f$
$\alpha^4$	$f$	$b$	$a$	$e$	$h$	$d$	$c$	$g$
$\alpha^2$	$e$	$a$	$b$	$f$	$g$	$c$	$d$	$h$
1	$d$	$h$	$g$	$c$	$b$	$f$	$e$	$a$
$\alpha^3$	$c$	$g$	$h$	$d$	$a$	$e$	$f$	$b$
$\alpha$	$b$	$f$	$e$	$a$	$d$	$h$	$g$	$c$
0	$a$	$e$	$f$	$b$	$c$	$g$	$h$	$d$
	0	$\alpha$	$\alpha^3$	1	$\alpha^2$	$\alpha^4$	$\alpha^5$	$\alpha^6$

droites de pente  $\alpha$

Fig.12a

$\alpha^6$	$h$	$c$	$a$	$f$	$b$	$e$	$g$	$d$
$\alpha^5$	$g$	$d$	$b$	$e$	$a$	$f$	$h$	$c$
$\alpha^4$	$f$	$a$	$c$	$h$	$d$	$g$	$e$	$b$
$\alpha^2$	$e$	$b$	$d$	$g$	$c$	$h$	$f$	$a$
1	$d$	$g$	$e$	$b$	$f$	$a$	$c$	$h$
$\alpha^3$	$c$	$h$	$f$	$a$	$e$	$b$	$d$	$g$
$\alpha$	$b$	$e$	$g$	$d$	$h$	$c$	$a$	$f$
0	$a$	$f$	$h$	$c$	$g$	$d$	$b$	$e$
	0	$\alpha$	$\alpha^3$	1	$\alpha^2$	$\alpha^4$	$\alpha^5$	$\alpha^6$

droites de pente  $\alpha^3$

Fig. 12b

On peut maintenant donner n'importe quelles valeurs à  $a, b, c, \dots, g, h$  dans le premier carré  $C_1$  de sorte que  $\{a, b, \dots, g, h\} = [8]$ , et faire de même dans le second carré  $C_2 : 8C_1 + C_2$  nous donnera un carré magique, comme le prévoit la théorie. Mais on veut plus : un carré panmagique. Pour cela, il faut que les 12 diagonales brisées de  $C_1$  qui ne sont pas des droites de pente 1 aient comme somme 28. Cela fournit 6 équations répétées une fois ; par exemple, la diagonale montante 2+6 de  $C_1$  fournit l'équation  $g + d + f + a + a + f + d + g = 2(a + d + f + g) = 28$ . On voit rapidement qu'avec  $a + g = b + h = c + e = d + f = 7$ , on

aura une solution : il s'agit de partitionner [8] en 4 ensembles de deux éléments  $g$  de somme 7, par exemple  $\{a, g\} = \{0, 7\}$ ,  $\{b, h\} = \{5, 2\}$ ,  $\{c, e\} = \{6, 1\}$  et  $\{d, f\} = \{3, 4\}$ .

De même, il faut aussi s'assurer que les 12 diagonales brisées de  $C_2$  qui ne sont pas des droites de pente 1 aient somme 28 ; on voit bientôt qu'avec  $a + c = b + d = e + g = f + h = 7$ , on aura une solution. Ce qu'on obtient en posant, par exemple,  $a = 6$ ,  $b = 4$ ,  $c = 1$ ,  $d = 3$ ,  $e = 2$ ,  $f = 0$ ,  $g = 5$ ,  $h = 7$ . Pour  $C_1$  et  $C_2$ , toutes les lignes, colonnes, diagonales brisées ou non ont maintenant la même somme 28, et  $A_8 = 8C_1 + C_2$  nous donne le carré panmagique de la figure 13.

23	25	54	56	36	42	5	11
61	51	28	18	14	0	47	33
32	46	1	15	19	29	50	60
10	4	43	37	57	55	24	22
27	21	58	52	40	38	9	7
49	63	16	30	2	12	35	45
44	34	13	3	31	17	62	48
6	8	39	41	53	59	20	26

Fig. 13 :  $A_8$

C'est une assez belle bête que ce carré ! Par exemple, tous les sommets diagonalement opposés des sous-carrés de côté 5 ont somme 63. Tous les rectangles de hauteur 4 et de largeur 2 ont comme somme 252 et, en conséquence, tous les sous-carrés de côté 4 ont somme 504. Même en voyant le carré comme un tore !

L'écriture et la manipulation des équations assurant la panmagie peuvent paraître assez lourdes. On va les alléger considérablement. Dans tous les cas traités jusqu'ici, on a été amenés à trouver une partition de  $[n]$  en  $s$ -parties toutes de même somme. Pourquoi en est-il ainsi ?

Soit  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$  la liste des coordonnées prises dans un anneau à  $n$  éléments  $A$  et placées dans cet ordre sur les deux axes. On dira que la liste des coordonnées est **tour-nante** s'il existe  $\gamma \in A$  et un entier non nul  $r$  tels que  $c_i + \gamma = c_{i+r}$ , pour tout  $i$ , les indices étant lus modulo  $n$ . Par exemple, avec  $\mathbf{Z}_n$ , la liste des coordonnées était tournante avec  $\gamma = 1$  et, pour  $F_4$ , elle était tournante avec  $\gamma = \alpha$ . Soit  $\Delta_k$  la diagonale montante du carré commençant  $k$  cases au-dessus de la diagonale montante ordinaire et  $\nabla_k$  la diagonale descendante finissant  $k$  cases au-dessus de la diagonale descendante ordinaire. On voit aisément que  $\Delta_k = \{(c_i, c_{i+k}) \mid i \in [n]\}$  et  $\nabla_k = \{(c_i, c_{n-1-i+k}) \mid i \in [n]\}$ .

**Lemme** *Supposons que la liste des coordonnées est tournante : pour tout  $i$ ,  $c_i + \gamma = c_{i+r}$ . Si  $\Delta_k$  rencontre la droite  $D$  d'équation  $y = mx + b$ , alors  $\Delta_k$  rencontre aussi la droite  $y = mx + b + (1 - m)\gamma$  et en exactement le même nombre de points. Si la diagonale  $\nabla_k$  rencontre la droite  $D$ , alors elle rencontre aussi la droite  $y = mx + b + (m + 1)\gamma$  et le même nombre de fois.*

En effet, si  $(c_i, c_{i+k})$  est sur  $D$ , alors  $c_{i+k} = mc_i + b$  et  $mc_{i+r} + b + (1 - m)\gamma = m(c_i + \gamma) + b + (1 - m)\gamma = mc_i + b + \gamma = c_{i+k} + \gamma = c_{i+r+k}$  et donc  $\Delta_k$  rencontre la droite  $y = mx + b + (1 - m)\gamma$  au point  $(c_{i+r}, c_{i+r+k})$ . L'argument est semblable pour obtenir le point  $(c_{i-r}, c_{n-1-(i-r)+k}) \in \nabla_k$ .

**Proposition 6** *Supposons que la liste  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$  des coordonnées est tournante : il existe  $\gamma \in A$  tel que  $c_i + \gamma = c_{i+r}$ , pour tout  $i$ . Soit  $m \in A$ . Dénotons par  $\bar{b} \in [n]$  l'étiquette de la droite  $y = mx + b$  dans le carré des droites de pente  $m$ . Soit  $s$  le plus petit entier tel que  $(1 - m)\gamma + (1 - m)\gamma + \dots + (1 - m)\gamma$  ( $s$  fois)  $= 0$  et  $T_n = 0 + 1 + \dots + n - 1$ . Si  $B = \bar{b} + \overline{\bar{b} + (1 - m)\gamma} + \overline{\bar{b} + 2(1 - m)\gamma} + \dots + \overline{\bar{b} + (s - 1)(1 - m)\gamma}$ , alors l'équation exigeant que la somme des étiquettes sur  $\Delta_k$  soit  $T_n$  s'écrit  $a_1 B_1 + a_2 B_2 + \dots + a_{n/s} B_{n/s} = T_n$ , où les  $B_i$  sont tous de la même forme que  $B$ , sont les mêmes pour tous les  $k = 0, 1, \dots, n - 1$  et partagent les étiquettes, et où les  $a_i$  sont des entiers naturels dépendant de  $k$  et de somme  $n/s$ . Une solution du système est alors donnée par une partition de  $[n]$  en  $n/s$  classes de  $s$  éléments, toutes de même somme  $T_n \times s/n$ . On a un résultat pareil pour  $\nabla_k$ , le terme  $(1 - m)\gamma$  étant remplacé par  $(1 + m)\gamma$ .*

En effet, lorsque  $\bar{b}$  apparaît, alors  $\overline{\bar{b} + (1 - m)\gamma}, \dots, \overline{\bar{b} + (s - 1)(1 - m)\gamma}$  aussi et le même nombre de fois.

À titre d'exemple reprenons le carré d'ordre 8 construit sur le corps  $F_8$  avec  $c_0 = 0, c_1 = 1, c_2 = \alpha, c_3 = \alpha^2, \dots, c_7 = \alpha^6$ . On voit immédiatement que  $\gamma = \alpha^2$  nous donne  $c_i + \gamma = c_{i+4}$  : la liste des coordonnées est tournante. Pour la pente  $m = \alpha$ , on a  $(1 - m)\gamma = \alpha^5$  et  $2(1 - m)\gamma = 0$  et  $s = 2$ .  $B$  s'écrit donc  $B = \bar{b} + \overline{\bar{b} + (1 - m)\gamma} = \bar{b} + \overline{\bar{b} + \alpha^5}$ . Une solution du système d'équations pour les diagonales montantes sera donc donnée par une solution de  $\bar{0} + \overline{\alpha^5} = \bar{1} + \overline{1 + \alpha^5} = \bar{\alpha} + \overline{\alpha + \alpha^5} = \overline{\alpha^2} + \overline{\alpha^2 + \alpha^5} = 7$ , c-à-d.  $\bar{0} + \overline{\alpha^5} = \bar{1} + \overline{\alpha^4} = \bar{\alpha} + \overline{\alpha^6} = \overline{\alpha^2} + \overline{\alpha^3} = 7$ , dont une solution est donnée par la partition  $0, 7; 3, 4; 5, 2; 1, 6$  de  $[8]$  en 4 classes de 2 éléments et de somme 7. Les équations sont les mêmes pour les diagonales descendantes puisque  $m = -m$ , et il ne reste plus qu'à écrire le carré  $C_1$  puis faire de même



pour le carré  $C_2$ .

De la même manière, en utilisant l'anneau produit  $F_4 \times Z_3$ , comme liste de coordonnées  $(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), \dots, (\alpha, 0), (\alpha, 1), \dots, (\alpha^2, 2)$ , on trouve  $c_i + \gamma = c_{i+6}$ , où  $\gamma = (\alpha, 0)$ . Avec, par exemple, les pentes  $(\alpha^2, 2)$  et  $(\alpha, 1)$ , on obtient rapidement, grâce à la proposition précédente, les équations dont la solution exigera une partition de [12] en 6 classes de 2 éléments et de somme 11, et on en tire finalement un carré panmagique d'ordre 12. Ou encore avec l'anneau  $F_8 \times Z_3$ , et des pentes comme  $(\alpha, 1)$  et  $(\alpha^6, 2)$ , on peut fabriquer assez aisément un panmagique d'ordre 24. Et s'il reste un peu de courage pour fabriquer un nouveau carré panmagique d'ordre 9 avec le corps à 9 éléments, on pourra être amené à utiliser deux partitions de [9] en trois classes de trois éléments et de somme 12 et qui se révéleront être les lignes et les colonnes du carré A3.

## 6 Un produit de carré magique

Il existe un produit de carrés magiques utile ici. Soit  $A = (a_{i,j})$  une matrice  $m$  par  $m$  et  $B = (b_{i,j})$  une matrice  $n$  par  $n$ . On peut définir un produit  $A \otimes B$  en remplaçant dans  $B$  chaque terme  $b_{i,j}$  par  $b_{i,j} + n^2 A$  et voir le résultat obtenu comme une matrice  $mn$  par  $mn$  constituée de  $n^2$  blocs de côté  $m$ . C'est ce qu'illustre la figure 14, où l'on a placé des lignes permettant de bien voir les blocs.

Le résultat qui nous intéresse ici est que, si  $A$  et  $B$  sont des carrés semi-magiques, alors le produit l'est aussi; si  $A$  et  $B$  sont magiques, alors le produit l'est également; si  $A$  et  $B$  sont panmagiques, alors leur produit l'est aussi. Voyons, par exemple, ce qui se passe dans la colonne  $(j-1)m+r$ , qui commence dans la  $r$ -ième colonne du  $j$ -ième bloc du produit. Désignons par  $S_m$  et  $S_n$  les sommes magiques pour  $A$  et pour  $B$ . Dans la colonne en question on rencontre successivement  $b_{1,j} + n^2 a_{1,r}, b_{1,j} + n^2 a_{2,r}, \dots, b_{1,j} + n^2 a_{m,r}, b_{2,j} + n^2 a_{1,r}, b_{2,j} + n^2 a_{2,r}, \dots, b_{2,j} + n^2 a_{m,r}, \dots, \dots, b_{n,j} + n^2 a_{m,r}$ . En les additionnant, on obtient pour le premier bloc la somme  $m b_{1,j} + n^2 S_m$ , pour le second bloc  $m b_{2,j} + n^2 S_m$  et ainsi de suite jusqu'au dernier bloc. Le total de ces diverses sommes est alors  $m b_{1,j} + m b_{2,j} + \dots + m b_{n,j} + (n^2 S_m + n^2 S_m + \dots + n^2 S_m) = m S_n + n^3 S_m$ , qui ne dépend pas de la colonne choisie et qui est précisément la somme magique pour un carré de côté  $mn$ .

3	8	1	58	138	26	61	141	29	48	128	16	55	135	23
2	4	6	42	74	106	45	77	109	32	64	96	39	71	103
7	0	5	122	10	90	125	13	93	112	0	80	119	7	87
			52	132	20	51	131	19	62	142	30	57	137	25
			36	68	100	35	67	99	46	78	110	41	73	105
			116	4	84	115	3	83	126	14	94	121	9	89
			63	143	31	56	136	24	53	133	21	50	130	18
			47	79	111	40	72	104	37	69	101	34	66	98
			127	15	95	120	8	88	117	5	85	114	2	82
			49	129	17	54	134	22	59	139	27	60	140	28
			33	65	97	38	70	102	43	75	107	44	76	108
			113	1	81	118	6	86	123	11	91	124	12	92

10	13	0	7
4	3	14	9
15	8	5	2
1	6	11	12

A

10	13	0	7
4	3	14	9
15	8	5	2
1	6	11	12

B

Fig. 14 Les carrés  $A$ ,  $B$  et le produit  $A \otimes B$

Concluons ! Au long de ce travail, on a vu comment construire des carrés panmagiques affines d'ordre  $n \geq 4$ , pour  $n$  égal à 4, 8, 9, 27, ou encore  $n$  premier ou de la forme  $3p$  avec  $p$  premier, etc. On dit que l'entier  $n$  est **simplement pair** s'il est divisible par 2 et non par 4. Il n'y a pas de carrés panmagiques d'ordre simplement pair. Martin ([3], p. 260) en donne une démonstration brève et imagée. À l'opposé, grâce à la décomposition d'un nombre en facteurs premiers, au produit de carrés panmagiques et aux résultats présentés dans ce travail, on peut affirmer qu'il existe, pour tout entier non simplement pair  $n \geq 4$ , un carré panmagique d'ordre  $n$ , produit de carrés affines. Cependant un produit de carrés affines n'est pas nécessairement affine. Le résultat suivant permet d'aller plus loin.

**Proposition 7** *S'il existe des carrés panmagiques affines d'ordre  $m$  et  $n$ , alors il existe également un carré panmagique affine d'ordre  $nm$ .*

Nous omettrons la démonstration, essentiellement technique. Signalons seulement que si  $M_1$  et  $M_2$  sont des carrés panmagiques affines d'ordre  $m$  et  $n$  obtenus au moyen des anneaux  $A$  et  $B$  avec  $i_0, i_1, \dots, i_{m-1}$  comme liste de coordonnées pour  $A$  et  $j_0, j_1, \dots, j_{n-1}$  comme liste des coordonnées pour  $B$ , alors on peut prendre  $(i_0, j_0), (i_0, j_1), (i_0, j_2), \dots, (i_0, j_{n-1}), (i_1, j_0), \dots, (i_1, j_{n-1}), (i_2, j_0), \dots, (i_{m-1}, j_{n-1})$  comme liste des coordonnées pour l'anneau produit  $A \times B$ . On considère alors les droites d'équations  $y = (m_1, n_1)x + (b, d)$ , où  $m_1, b \in A$ ,  $n_1, d \in B$ , avec les étiquettes  $\overline{(b, d)} = n\bar{b} + \bar{d} \in [mn]$  pour obtenir le premier carré auxiliaire d'un carré affine d'ordre  $mn$ .

Les propositions précédentes permettent de conclure :

**Proposition 8** *Pour tout entier  $n \geq 4$  et non simplement pair, il existe un carré panmagique affine d'ordre  $n$ .*

Signalons en terminant que, dans tout ce travail, on a utilisé l'équation de la droite sous la forme  $y = mx + b$ ; on aurait pu aussi bien utiliser l'équation générale  $Ax + By + C = 0$  ou les équations paramétriques  $x = a + ut, y = b + vt$ . On n'a pas tenté d'exhiber les carrés les « plus » magiques, mais seulement d'exposer une méthode simple d'inspiration géométrique et assez générale. Notons également qu'elle s'étend aux cubes magiques, en remplaçant la notion de droite par celle de plan et la division par  $n$  par les divisions par  $n^2$  et  $n$  pour produire trois cubes auxiliaires. Et qu'on peut utiliser des structures plus générales que celle d'anneau...

## Références

- [1] Descombes, René (2002). *Les carrés magiques. Histoire, théorie et technique du carré magique, de l'Antiquité aux recherches actuelles*. Vuibert, 494 pp. (Presque aucune démonstration mais une magnifique collection de méthodes de construction et d'exemples de carrés magiques)
- [2] Lehmer, D. N. (1929). *On the Congruences connected with certain Magic Squares*, p. 529-551. (Pour une étude de la méthode de La Loubère généralisée)
- [3] Martin, Yves. *Les carrés magiques dans la tradition mathématique arabe*. Sur le site Internet <http://reunion.iufm.fr/dep/mathematiques/Seminaires/ActesPDF/Martin38.pdf>

On trouvera dans Internet beaucoup de sites sur les carrés magiques, par exemple <http://mathworld.wolfram.com/>

N. B. L'auteur a écrit quelques programmes d'ordinateur permettant de construire des carrés magiques affines; il se fera un plaisir de les partager.

Adresse de courriel : [julien@abacom.com](mailto:julien@abacom.com)