Les nombres polygonaux

Jacques Sormany
UQAC et CEGEP de Chicoutimi

Un problème connu

Il est bien connu que la somme des n premiers entiers positifs peut être calculée par la formule $n(n+1)/2$, donnant ce qu'on appelle les nombres triangulaires. La somme des n premiers nombres impairs donne quant à elle les nombres carrés, obtenus directement par la formule évidemment plus simple n^2.

Dans un numéro récent de *Québec Science*, notre collaborateur de longue date Jean-Marie Labrie demandait aux lecteurs de trouver le terme général des nombres pentagonaux. Or, la réponse $(3n^2 - n)/2$ avait été donnée et expliquée peu de temps auparavant par André Ross dans le *Bulletin AMQ* !

Généralisation

Les nombres hexagonaux, pour leur part, ont comme formule $n(2n-1)$. Comment se fait-il qu'à première vue les formules paraissent si différentes les unes des autres à mesure que n augmente ?

En fait, elles ne sont pas si différentes. Ce sont toutes des formules en n^2, ce qui est normal puisqu'elles correspondent à une disposition bi-dimensionnelle des unités. À partir du terme général $(5n^2 - 3n)/2$ des nombres heptagonaux, qui ressemble à celui des nombres pentagonaux, il est facile d'inférer, et ensuite de vérifier, une formule générale pour les nombres polygonaux de n'importe quel ordre.

Cette formule est : $[kn^2 - (k-2)n]/2$ où $k+2$ est le côté du polygone correspondant ($k = 1$ pour le triangle, 2 pour le carré, 3 pour le pentagone, etc.). Pour $k = 0$, on obtient la suite des entiers naturels n. On peut constater que l'ensemble des couples (k, n) d'entiers naturels engendre bien le tableau complet des nombres polygonaux : tout nombre de la ligne k et de la colonne n peut être calculé directement à l'aide de cette formule. Pour n pair, la formule est allégée grâce à une simplification par 2.

k= n =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Formule
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	n(0n+2)/2 = n
1	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	n(1n+1)/2
2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	n(2n-0)/2 = n^2
3	0	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	176	210	n(3n-1)/2
4	0	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190	231	276	n(4n-2)/2 = n(2n-1)
5	0	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235	286	342	n(5n-3)/2
6	0	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280	341	408	n(6n-4)/2 = n(3n-2)
7	0	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325	396	474	n(7n-5)/2
8	0	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370	451	540	n(8n-6)/2 = n(4n-3)
9	0	1	11	30	58	95	141	196	260	333	415	506	606	n(9n-7)/2
10	0	1	12	33	64	105	156	217	288	369	460	561	672	n(10n-8)/2 = n(5n-4)
11	0	1	13	36	70	115	171	238	316	405	505	616	738	n(11n-9)/2
12	0	1	14	39	76	125	186	259	344	441	550	671	804	n(12n-10)/2 = n(6n-5)
Formule	0	1	2+k	3+3k	4+6k	5+10k	6+15k	7+21k	8+28k	9+36k	10+45k	11+55k	12+66k	n(kn-k+2)/2 = n+kn(n-1)/2

Pourquoi k pour un polygone de côté $k+2$? On aurait pu choisir une constante égale au côté du polygone, et obtenir une formulation tout aussi correcte ; trois raisons motivent le choix actuel de k :

1° les formules obtenues sont plus simples ;

2° elles sont définies pour tout entier naturel, et non à partir seulement de $n=2$;

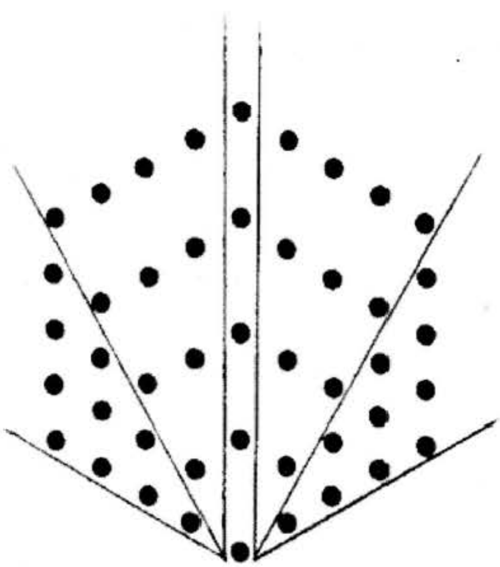
3° pour chaque ligne du tableau, la différence finie d'ordre 2 est égale à k.

On remarque aussi que pour chaque colonne n à partir de la 2^e, la différence finie d'ordre 1 est égale au n-ième nombre triangulaire.

Représentation géométrique

En développant et regroupant les termes de la formule générale, on peut la réécrire de différentes manières, dont l'une apparaît particulièrement intéressante : $n+k\,n(n-1)/2$, ce qui revient à dire que :

le n-ième nombre polygonal d'ordre $k+2$ est égal à : l'entier n, plus k fois le nombre triangulaire de rang précédent. Les Grecs auraient certainement trouvé une illustration de cette propriété ; la voici, par exemple, pour les nombres hexagonaux $(k=4)$:



Cas particuliers

Mais revenons au tableau. En faisant parcourir à k l'ensemble des entiers naturels, on obtient les formules des nombres triangulaires, carrés, pentagonaux, etc. indiquées dans la colonne de droite. Mais on peut aussi, en fixant la valeur de n, obtenir l'expression du n-ième nombre polygonal quel que soit k : ces formules générales occupent ici la dernière ligne du tableau.

Ainsi le premier nombre polygonal est toujours 1, le suivant $k+2$; la troisième colonne est constituée de tous les multiples non nuls de 3. La 5^e colonne ne comprend que des multiples de 5, au rythme de un sur deux ; la 7^e colonne, des multiples de 7 (un sur trois), la 9^e, un multiple de 9 sur quatre, et ainsi de suite. Dans les colonnes de rang pair, les nombres qui apparaissent sont toujours des multiples, pas forcément de n, mais de $n/2$:

c'est ainsi qu'on voit apparaître des nombres alternativement pairs et impairs dans la colonne 6. Ces propriétés découlent de la formule générale, dont la parité résulte de celle de n, k et $n(n-1)/2$.

Nombres polygonaux au sens strict

On remarque que tous les entiers naturels apparaissent au moins une fois dans le tableau. Ils remplissent la ligne $k=0$ et, à partir de 2, la colonne $n=2$, les cas particuliers 0 et 1 monopolisant les colonnes 0 et 1. Seul l'entier 2 apparaît une seule fois dans le tableau : à l'intersection de la ligne 0 et de la colonne 2.

On peut qualifier de triviaux les nombres polygonaux qui apparaissent seulement dans la ligne $k=0$ ou dans la colonne $n=2$. Les véritables nombres polygonaux qui nous intéressent seront les nombres non triviaux, c'est-à-dire tous ceux qui apparaissent ailleurs dans le tableau.

Parmi eux, on l'a vu, on trouve tous les multiples de 3, dont certains réapparaîtront ailleurs que dans la colonne 3 ; tous les multiples impairs de 5 dans la colonne 5, mais aussi certains multiples pairs ou impairs de 5 dans d'autres colonnes; des multiples de 7 et ainsi de suite.

Quelques questions

Quels sont les nombres triviaux, ceux qui n'apparaissent nulle part dans les lignes supérieures à 0 ou les colonnes de rang supérieur à 2 ?

Pour les nombres pairs, la liste commence ainsi : 2, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 50, 56, 62, ... À première vue, on serait porté à supposer qu'il s'agit de tous les nombres entiers de la forme $6k+2$; non seulement il ne serait pas facile de le démontrer, mais c'est faux ! Le premier nombre polygonal de cette forme est 92 (8^e nombre pentagonal), suivi de 128 (8^e nombre hexagonal). On peut tenter ici une conjecture : quels que soient les entiers positifs a, b et k, il existe une infinité de nombres polygonaux non triviaux de la forme $ak+b$.

Tous les nombres polygonaux de rang n impair étant multiples de n, il s'ensuit qu'un nombre premier ne peut être polygonal que de façon triviale. Les premiers nombres composés impairs à être polygonaux triviaux sont : 77, 119, 143, ... et on peut conjecturer qu'il y en a une infinité.

Certains entiers n'apparaissent qu'une fois de façon non triviale : ce sont 6, 9, 10, 12, 16, ... Mais le 5^e nombre triangulaire, 15, est aussi le 3^e nombre hexagonal ; le 6^e nombre triangulaire, 21, est aussi le 3^e nombre octogonal. Le plus petit entier non multiple de 3 à réapparaître est 28 (7^e nombre triangulaire et 4^e nombre hexagonal). Le premier entier à apparaître 3 fois de façon non triviale est 36 (8^e nombre triangulaire, 6^e carré et 3^e nombre polygonal de côté 13). Les plus petits nombres non triangulaires à apparaître deux fois de façon non triviale sont 51 et 64.

On sait déjà que les multiples de 3 ont plus de chances de réapparaître ailleurs dans le tableau, et il semble que les apparitions multiples deviennent plus fréquentes à mesure que les nombres augmentent ; mais bien d'autres questions demeurent ouvertes, par exemple :

> Soit m un entier pris au hasard. De combien de façon x peut-on l'exprimer comme nombre polygonal ?
>
> Soit x un entier quelconque : combien de nombre sont polygonaux exactement de x façons, et comment peut-on les trouver ?
>
> Peut-on trouver une formule générale donnant les entiers dont la forme polygonale non triviale est unique ?

Dimensions supérieures

De telles questions peuvent être prolongées vers des dimensions supérieures à 2. En 3 dimensions, comme il n'existe que cinq polyèdres réguliers, la famille des nombres polyédraux est nécessairement restreinte ; mais il existe beaucoup d'autres dispositions intéressantes : nombres prismatiques, pyramidaux, etc. entre lesquels on peut trouver de très nombreuses relations. Sans entrer dans les détails, voici la plus simple : tout nombre octaédral est la somme de deux nombres pyramidaux consécutifs.

Nombres carrés :	1	4	9	16	25	...
Nombres pyramidaux (base carrée) :	1	5	14	30	55	...
Nombres octaédraux :	1	6	19	44	85	...

Les formules générales pour les nombres figurés à 3 dimensions seront toutes des polynômes du troisième degré, et les différences finies d'ordre 3 sont constantes.

Applications pédagogiques

Les formules étudiées ici ne sont pas nouvelles : il y a plus d'un siècle, Édouard Lucas en répertoriait beaucoup ; plus récemment, Conway et Guy présentent des formules équivalentes appuyées d'illustrations géométriques, établissent des relations entre elles, explorent la troisième dimension et les dimensions supérieures.

Ce thème d'étude se révèle finalement très riche, selon plusieurs aspects :

> Il touche à plusieurs branches des mathématiques – théorie des nombres et analyse numérique, algèbre, géométrie, ...

Il occupe sa place dans l'histoire des mathématiques, et débouche sur diverses applications concrètes : dénombrements, empilements, construction, jeux, beaux-arts...

Très faciles à aborder, les problèmes donnent lieu à des généralisations de plus en plus complexes ; à mesure qu'un problème est résolu, il peut susciter de nouvelles questions, donnant envie d'aller chercher toujours plus loin.

Il paraît donc intéressant de faire appel à ce thème en classe, que ce soit pour lui-même ou pour illustrer d'autres concepts mathématiques ; on s'en sert déjà, mais on pourrait le faire encore davantage, et ce dès le niveau primaire et jusqu'à l'université.■

Références bibliographiques

Conway, J. H. et Guy, R. (1998). *Le livre des nombres*. Paris, Eyrolles, 310 p.

Labrie, J.-M. (2003). *Québec Science*, septembre (p. 49), octobre (p. 49).

Lucas, É. (1891, rééd. 1961). *Théorie des nombres*. Paris, A. Blanchard, p. 53-60.

Ross, A. et Charbonneau, L. (mai 2003). Représentation des nombres, *Bulletin AMQ*, 42(2), p. 37-51.

Jacques Sormany
UQAC et Cégep deChicoutimi