Enseignement

Diane Demers
Marie-Jeanne Haguel

La moyenne des limites ?

Diane Demers
Cégep de Maisonneuve

J'ai toujours porté une attention particulière à la présentation de la notion de limite dans le cours de calcul différentiel. C'est pourquoi, lorsqu'une réponse inusitée est survenue dans mes deux premiers groupes de sciences de la nature, je me suis posé quelques questions : « Comment se fait-il que cette erreur se produise, et dans ces deux groupes de surcroît ? Puis-je faire quelque chose pour l'éviter ? ». Dans cette chronique, je décris cette erreur et tente de lui donner un sens.

Rappelons que dans un premier cours de calcul différentiel de niveau collégial, on présente généralement la limite de façon intuitive (on ne fait pas appel à la notion de voisinage, avec ε et δ) : on parle alors de *définition intuitive* ou *informelle*, de *quasi-définition* (Ouellet, [5]) ou tout simplement on se limite à parler de *notation* pour représenter la notion de limite exprimée au moyen d'exemples. (À noter que l'on retrouve tout de même certains volumes de niveau collégial où l'on introduit une définition formelle.) Respectant cette approche, j'utilise le terme « définition » entre guillemets pour désigner celle-ci dans le texte qui suit, pour souligner son caractère informel.

Voici donc trois situations de classes où je présente la notion de limite au cégep. Dans chacune, la présentation est légèrement différente et les réponses données par les étudiants sont présentées.

Première situation : Deux groupes de sciences de la nature, automne 2001

J'ai utilisé la même présentation que j'avais faite les trois années précédentes, en cours du soir, à des étudiants provenant de disciplines variées. Après avoir exposé deux paradoxes de Zénon, je présente la série $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\ldots$ comme représentant la distance parcourue par bonds entre deux points distants de 1 km. (Les bonds franchissent toujours la moitié de la distance qu'il reste à parcourir.) En construisant une table de valeurs, on remarque que cette distance (d) en fonction du nombre de bonds effectués (n) s'exprime par

$$d=\frac{2^n-1}{2^n}$$

(il y a toujours au moins un étudiant dans la classe pour trouver ce terme général). On évalue ensuite le nombre de bonds nécessaires pour atteindre une distance d'au moins 0,9 km, puis 0,99 km, et ainsi de suite. On remarque alors qu'un nombre de bonds est toujours possible pour nous rapprocher aussi près que l'on veut de la distance de 1 km convoitée : il suffit de reprendre le raisonnement précédent. On exprime alors cette tendance sous forme de limite : une première notation est introduite (pour la limite à l'infini). Par la suite, pour la limite lorsque x tend vers une valeur a, je m'appuie sur l'approche utilisée par Anton [1] : au moyen d'une série d'exemples numériques et graphiques, on introduit successivement les notations de limites à droite et à gauche, puis la notation de limite en termes de ces deux dernières, accompagnées de définitions informelles. J'insiste ensuite sur les limites à droite et à gauche, numériquement d'abord, mais graphiquement surtout. Puis, je présente l'exemple typique suivant d'une fonction définie par morceaux :

$$f(x)=\begin{cases}(x+3)^2 & x<0\\ x+10 & x\geq 0\end{cases}.$$

Je pose la question : Que pourrait-on dire de la limite $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

J'ai alors obtenu dans l'ordre les réponses suivantes : 9,5, $\{9{,}10\}$, [9, 10] et « n'existe pas ». La première réponse m'a tellement surprise que j'ai laissé retentir une sorte d'éclat : « 9,5 ? ? ? ». L'élève a expliqué sa réponse en disant : « Parce que 9,5 est entre 9 et 10 ». « Quelle idée », me suis-je dit, « que de faire la moyenne de 9 et de 10 ! ». En revoyant la notion de limite avec cet exemple (« il s'agit d'*un* nombre réel dont on doit pouvoir s'approcher *aussi près que l'on veut* »), les étudiants n'ont plus refait cette erreur par la suite (ni les deux autres d'ailleurs). Mais tout de même, je suis demeurée perplexe quant à la réponse ... d'autant plus que je ne l'avais pas rencontrée dans les groupes précédents.

Deuxième situation : Un groupe de sciences humaines, hiver 2002

Cette fois, j'ai décidé de ne pas introduire immédiatement la notation de limite, juste les notations de limites à droite et à gauche, avec définitions informelles. Les exemples graphiques habituels ont suivi, puis finalement l'exemple décrit à la situation 1. À la même question (Que pourrait-on dire de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?), j'ai obtenu cette fois les réponses suivantes : $\{9,\ 10\}$, [9, 10] et « on n'a pas vu la définition ». À ce stade j'ai donc introduit la « définition » de limite en termes des limites à droite et à gauche et reposé la question. Aucun étudiant n'a répondu 9,5. Le raisonnement menant à celle-ci a-t-il été désamorcé ? Est-ce que les étudiants ont mieux compris ? La troisième réponse fournie dénote une certaine perspicacité. Notons cependant que ces étudiants me semblaient moins confiants ou plus timides que ceux de la situation précédente car j'ai dû insister pour qu'ils expriment leur pensée à haute voix. Par la suite du moins, ils n'ont jamais eu l'idée de faire une moyenne des limites à droite et à gauche comme dans la première situation.

Troisième situation : Un groupes de sciences pures, automne 2003

Dans cette classe, j'ai procédé à l'inverse, selon la présentation de Thomas [7] : il s'agissait d'introduire d'abord la notion de limite (sous forme de définition informelle et notation), sans les limites à droite et à gauche. J'ai donc appliqué la « définition » dans des exemples numériques et graphiques où les limites à gauche et à droite n'interviennent pas, puis j'ai présenté l'exemple présenté à la situation 1. À la même question toujours, j'ai obtenu *exactement* les mêmes réponses qu'à la situation 1. Cette fois, je n'ai pas été surprise de la réponse 9,5.

Entre-temps, j'ai rencontré dans Kline [3], suite à une lecture de Sierpinska [6], quelques pages traitant de la série 1 − 1 + 1 − 1 + 1 ... On y discute de la difficulté qu'ont rencontré les mathématiciens du 17^e siècle à traiter cette série divergente. Entre autres, différentes argumentations sont présentées pour justifier l'égalité $1-1+1-1+1-\ldots=½$. L'une d'elles fait appel au développement en série d'une fonction, notion trop avancée pour le niveau de mes étudiants. Par contre, un raisonnement formulé par Leibniz me semble probablement plus près de celui de mes étudiants. Le voici : les sommes partielles de la série sont 1, 0, 1, 0, 1, ... Puisque les 0 et 1 sont équiprobables, alors la somme devrait être considérée comme la moyenne arithmétique de ces deux nombres, soit ½, valeur la plus probable ! Dans Lehman [4], on présente même une extension de ce raisonnement émis par Lagrange. La série 1+ 0 − 1+ 1+ 0 −1+ 1 + 0 −... de sommes partielles 1, 1, 0, 1, 1, 0, ... se voit attribuer la moyenne pondérée de 0 et de 1 soit 2/3 ! Rappelons qu'à cette époque, les notions de convergence d'une série et de limite n'étaient pas encore formalisées.

Anna Sierpinska [5] s'est intéressée à la série 1 – 1 + 1– 1 ... dans le contexte d'étudiants en sciences humaines. Elle mentionne que les étudiants rencontrés acceptent sans étonnement la réponse qu'elle leur suggère $1 - 1 + 1 - 1 \ldots = \frac{1}{2}$ (en leur présentant une fausse démonstration mathématique).

Ainsi donc, il n'est finalement pas si surprenant que des étudiants en apprentissage de la notion de limite, d'autant plus que celle-ci n'est pas présentée formellement, reproduisent un raisonnement analogue. Cela m'indique que plutôt que de vouloir à tout prix éviter l'« erreur 9,5 », ce qui de toute façon ne semble pas avoir fonctionné pour les étudiants de sciences pures même en modifiant la stratégie d'enseignement, je devrais plutôt y voir un passage vers la compréhension de la notion d'existence d'une limite. Tant mieux même si elle permet de clarifier des questions restées informulées chez d'autres étudiants de la classe.

Un point m'intrigue tout de même : ce sont les étudiants de sciences de la nature (incluant sciences pures) qui ont eu l'idée de recourir à la moyenne pour trouver la limite, et uniquement ceux-là (3 groupes sur 9 groupes rencontrés). Coïncidence peut-être. Ou encore, je me suis demandé s'il n'y aurait pas là une habitude, conjuguée à une certaine aptitude et confiance, à trouver des solutions numériques à tout problème, même lorsqu'il n'y en a pas. ■

Références bibliographiques

1. Anton, H. (1995). *Calculus*. New York (NY), John Wiley & Sons Inc.

2. Boyer, C. B. (1959). *A History of the Calculus and its Conceptual Development*. New York (NY), Dover.

3. Kline, M. (1980). *Mathematics : The Loss of Certainty*. New York (NY), Oxford University Press.

4. Lehmann, J.P. (1995). Converging concepts of Series : Learning from History. Dans Swetz, F., Fauvel, J., Bekken, O., Johansson, B., Katz, V. (Eds.) *Learn from the Masters*. The Mathematical Association of America, p. 161-180.

5. Ouellet, G. (1999). *Calcul 1*. Québec, Les éditions Le Griffon d'argile.

6. Sierpinska, A. (1987). Humanities Students and Epistemological Obstacles Related to Limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18 (1987), p. 371-397.

7. Sierpinska, A. (1995). *La compréhension en mathématiques*. Mont-Royal, Modulo Éditeur, DeBoeck Université (coéditeur).

8. Godbout, V. (2003). *Calcul différentiel*. Laval, Groupe Beauchemin éditeur.

Diane Demers
Cégep de Maisonneuve
dianedemers@sympatico.ca

Association mathématique du Québec
Centre 7400
7400, boulevard Saint-Laurent, bureau 259
Montréal (Québec) H2R 2Y1
Téléphone : (514) 278-4263
Télécopieur : (514) 948-6423
www.amq.math.ca