Jeux et problèmes

Jean M. Turgeon
Université de Montréal

Première partie
Nouveaux jeux et problèmes

Problème 209
Le fanion

Une voiture se déplace vers le nord. Elle porte un fanion fixé à une tige verticale. Un vent fort et régulier souffle de l'ouest. Quand la voiture roule à 40 km à l'heure, le fanion forme un angle de 60° avec la ligne de mouvement de la voiture. À quelle vitesse de la voiture le fanion forme-t-il un angle de 30° ?

Problème 210
Le carré magique d'ordre 4

Les nombres de 1 à 16 sont disposés dans la grille ci-contre de telle manière que la somme des nombres est 34 dans chacune des lignes, chacune des colonnes et dans les deux diagonales.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Le carré magique particulier donné ici apparaît dans une toile célèbre du peintre allemand Albrecht Dürer (1471-1528) intitulé *Mélancolie*. Les deux cases centrales de la ligne du bas indiquent la date de l'exécution de la toile : 1514.

Certains commentateurs de cette toile s'émerveillent du fait que la somme des nombres des quatre cases centrales est aussi 34, comme vous pouvez le vérifier. Ils ne semblent pas avoir remarqué que la même chose est vraie des nombres des quatre coins. Montrer qu'ils n'ont pas raison de s'émerveiller puisque, dans tout carré magique à quatre lignes et quatre colonnes constitué des nombres 1 à 16, la somme des nombres des quatre cases centrales et la somme des nombres des quatre coins sont égales à 34.

Problème 211
Le quadrilatère de Nixon

Un problème que Ross Honsberger a reçu de Fergus Gaines, qui l'a lui-même trouvé dans le livre de R. C. J. Nixon, *Euclid Revisited*, de 1899.

On considère un quadrilatère convexe $ABCD$ dont trois côtés sont de longueurs $AB = a$, $BC = b$ et $CD = c$. Si l'aire du quadrilatère est la plus grande possible, démontrer que la longueur x du quatrième côté satisfait à l'équation

$$x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc = 0.$$

Deuxième partie
Solutions de problèmes déjà posés

Problème 195 (mars 2000)
Le système avec carrés et produits.

Trouver toutes les paires de valeurs de x et de y qui satisfont au système

$$x^2 + y^2 = 40 \text{ et } 3x + 3y = 2xy.$$

Claude Bégin, Michel Béliveau et Alain Roy ont fait parvenir les solutions algébriques que je synthétise ci-dessous. En plus de fournir une solution algébrique succinte, Maurice Brisebois a fourni la belle solution géométrique qui suivra ».

On a

(1) $$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=40.$$

On remplace dans (1) la valeur de $2xy$ donnée par la deuxième équation et on obtient

$$(x+y)^2-3(x+y)-40=\big[(x+y)-8\big]\big[(x+y)+5\big]=0,$$

une équation du second degré en $x+y$ dont les zéros sont $x+y=8$ et $x+y=-5$.

Si $x+y=8$, alors

(2) $$y=8-x$$

et, en vertu de la deuxième équation,

(3) $$2xy=24.$$

On remplace y en (3) par sa valeur en (2) et on a

$$2x(8-x)=24$$

ou

$$x^2-8x+12=(x-6)(x-2)=0.$$

Les solutions sont $x=2$ et $y=6$ ou $x=6$ et $y=2$.

Si $x+y=-5$, alors

(4) $$y=5-x$$

et, en vertu de la deuxième équation,

(5) $$2xy=-15.$$

On remplace y en (5) par sa valeur en (4) et on a

$$2x(-5-x)=-15$$

ou

$$2x^2+10x-15=0.$$

La formule du second degré donne

$$\frac{-10\pm\sqrt{100+120}}{4}=\frac{-5\pm\sqrt{55}}{2}.$$

Les solutions sont

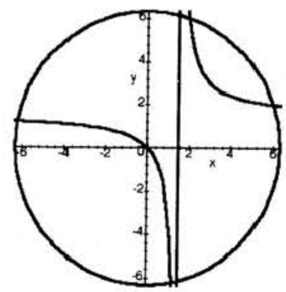
$$x=\frac{-5-\sqrt{55}}{2},\ y=\frac{\sqrt{55}-5}{2}$$

et

$$x=\frac{\sqrt{55}-5}{2},\ y=\frac{-5-\sqrt{55}}{2}.$$

L'approche géométrique de Maurice Brisebois :

« On cherche ici les points d'intersection du cercle centré à l'origine et de rayon $\sqrt{40}$ avec l'hyperbole $2xy=3(x+y)$. Comme ces deux coniques sont définies par des fonctions symétriques par rapport à la bissectrice $y=x$, le nombre de points d'intersection est nécessairement pair, chaque paire étant de la forme (x_o,y_o) et (y_o,x_o).



Puisque cette hyperbole passe par le centre du cercle, le cercle et une des deux branches de l'hyperbole se coupent en deux points ; le cercle et l'autre branche de l'hyperbole ont aussi deux points en commun puisque la bissectrice $y=x$ est confondue avec l'axe de l'hyperbole et puisque la distance entre les sommets des deux branches de l'hyperbole est inférieure à la longueur du rayon du cercle comme l'indique le graphique. »

Problème 196 (octobre 2001)
Les multiples d'âges

Mon ami Bernard a eu six fois l'âge de sa fille Angèle du 25 septembre 1970 au 15 mars 1971. Il a eu ensuite trois fois l'âge d'Angèle du 15 mars au 25 septembre 1977. Il a eu deux fois l'âge d'Angèle du 25 septembre 1990 au 15 mars 1991 et, de nou veau, du 15 mars au 25 septembre 1992. Trouver les dates de naissance d'Angèle et de Bernard. Pendant quelles périodes Bernard a-t-il eu cinq, puis quatre fois, l'âge de sa fille ? Quelles sont les autres périodes de temps où l'âge de Bernard était un multiple de l'âge d'Angèle ?

Je n'ai reçu aucune solution à ce problème de la

A	$n-1$	n	$n+1$	
B		$2n$	$2n+1$	$2n+2$

part de lecteurs. Pour l'aborder, il est utile de considérer le petit tableau ci-dessus, où n est l'âge d'Angèle au moment où Bernard a le double de l'âge d'Angèle pour la première fois. Bernard a déjà $2n$ quand Angèle arrive à l'âge de n, et l'âge d'Angèle est déjà $n+1$ quand Bernard arrive à l'âge de $2n+2$. On en conclut qu'Angèle est née un 25 septembre et que Bernard est né un 15 mars.

Soit a l'année de naissance d'Angèle et b l'année de naissance de Bernard. Alors, d'après les données du problème, on a

$$2\,(1990 - a) = 1990 - b$$

et

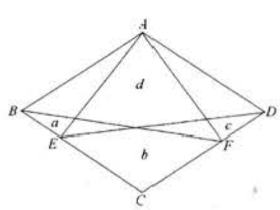
$$6\,(1970 - a) = 1970 - b,$$

un système de deux équations à deux inconnues dont la solution est $a = 1965$ et $b = 1940$.

Ainsi, Angèle a eu 5 ans du 25 septembre 1970 au 25 septembre 1971 et Bernard a eu 30 ans du 15 mars 1970 au 15 mars 1971, ayant six fois l'âge d'Angèle du 25 septembre 1970 au 15 mars 1971. De même, Angèle a eu 12 ans du 25 septembre 1977 au 25 septembre 1978 et Bernard a eu 36 ans du 15 mars 1976 au 15 mars 1977, ayant trois fois l'âge d'Angèle du 15 mars au 25 septembre 1977.

Bernard a eu six fois, trois fois et deux fois l'âge de sa fille, mais jamais un autre multiple de l'âge de sa fille.

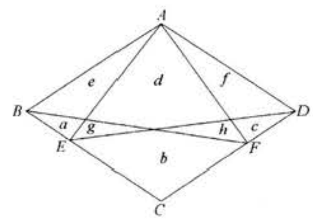
Problème 197
Des aires dans un losange



On considère un losange $ABCD$. Sur le côté BC, on choisit arbitrairement un point E et, sur le côté CD, on choisit arbitrairement un point F. On joint E à A et à D, puis on joint F à A et à B. Les quatre segments ainsi construits divisent l'intérieur du losange en huit régions. Les lettres inscrites dans quatre de ces régions dénotent leurs aires. Démontrer que

$$a + b + c = d.$$

M. Philippe R. Richard de la Faculté des sciences de l'éducation de l'Université de Montréal a fourni une solution qui consiste à faire glisser B vers A le long du côté AB du losange, qui reste en place, puis à faire glisser D vers A. Ces deux mouvements démontrent que les triangles CBF et CAF sont de même aire, puis que les triangles CDE et CAE sont de même aire. Ainsi, l'aire du quadrilatère $AECF$ est égale à la somme des aires des triangles CAF et CAE. M. Richard conclut : « Par conséquent, si on enlève l'aire des deux petits triangles non identifiés dans les triangles CBF et CDE respectivement, et qu'on enlève une fois l'aire b (qui est comptée deux fois), on obtient facilement l'égalité ».



Une autre approche consiste à donner des noms aux aires des huit régions du losange. On considère alors la moitié de l'aire S($ABCD$) du losange, exprimée de diverses façons. On obtient S(ABCD) /2

(1) $= S(EAD) = d + g + f$
(2) $= S(EAB) + S(EDC) = e + a + b + h + c$
(3) $= S(BFA) = e + d + h$
(4) $= S(BCF) + S(EAD) = a + g + b + c + f.$

On obtient l'égalité cherchée en comparant les équations (1) et (4) ou les équations (2) et (3). ■

Veuillez adresser toute correspondance concernant cette rubrique à :

Jean M. Turgeon (mathématiques)
Université de Montréal
C.P. 6128, succursale Centre-Ville
Montréal (Québec) H3C 3J7
Téléphone : 514-343-7178
Courriel : turgeon@dms.umontreal.ca
