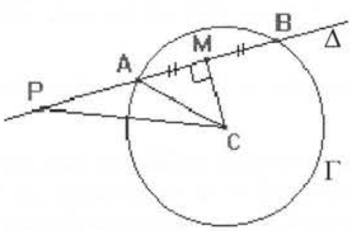
Notes mathématiques

Louis-Philippe Giroux
Collège Jean-de-Brébeuf

Une construction géométrique de CONWAY et GUY

On présente ici la construction des racines réelles d'une équation quadratique donnée par ces deux auteurs dans leur très beau livre *The Book of Numbers* (1, p. 192), où cette petite perle mathématique n'est accompagnée d'aucune explication. On utilisera la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle, qui permettra une analyse assez directe de ce problème menant à leur construction.

La puissance d'un point par rapport à un cercle[1]



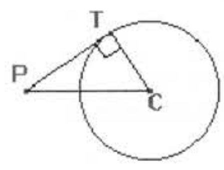
Dans le plan, soit P un point, et soit Γ un cercle, centré en C et de rayon ρ. Si Δ est une droite quelconque passant par P et coupant Γ aux points A et B, le produit de longueurs algébriques $\overline{PA}\cdot\overline{PB}$ demeure constant[2] ; en effet, M étant le point milieu de la corde AB, on a

$$\begin{aligned}\overline{PA}\cdot\overline{PB} &= \left(\overline{PM}+\overline{MA}\right)\cdot\left(\overline{PM}-\overline{MA}\right)\\ &= PM^2 - MA^2\\ &= \left(PM^2+CM^2\right)-\left(MA^2+CM^2\right),\end{aligned}$$

soit

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB} = PC^2-\rho^2,$$

une constante ne dépendant que de P et Γ, appelée puissance de P par rapport à Γ, et notée $\wp_\Gamma P$. Regardée comme fonction du point P, la puissance $\wp_\Gamma P$ est positive à l'extérieur du cercle Γ, nulle sur le cercle, et négative à l'intérieur.



Si P est extérieur à Γ, on obtient, en prenant Δ tangente à Γ au point T, que

$$\wp_\Gamma P = PT^2,$$

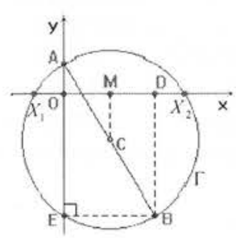
fait souvent utile, évident sur la figure ci-contre.

Une analyse du problème

Dans le plan cartésien Oxy, cherchons à construire les points X_1 et X_2 de l'axe Ox dont les abscisses x_1 et x_2 sont les racines de l'équation quadratique

$$x^2+bx+c=0;$$

ces racines, supposées réelles, vérifient des relations bien connues avec les coefficients b et c:



Essayons d'obtenir X_1 et X_2 comme points d'intersection d'un seul cercle Γ avec la droite Ox. Supposons, pour fixer les idées, que Γ passe par le point A d'ordonnée 1 de l'axe Oy, ce qui détermine Γ comme le cercle circonscrit au triangle AX_1X_2[3]. Le centre C de Γ se trouve sur la médiatrice de X_1X_2, segment dont le milieu M a pour abscisse

$$\overline{OM} = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2} .$$

Soit B l'autre extrémité du diamètre de Γ passant par A, et soient D et E les projections de B sur Ox et Oy respectivement. Puisque C est milieu du diamètre AB, M est également milieu du segment OD, et l'abscisse du point B est donc égale à $\overline{OD} = 2 \cdot \overline{OM} = -b$.

Or, le triangle ABE étant rectangle en E, le cercle Γ passe par E, et si l'on considère la puissance du point O par rapport à Γ, on obtient

$$\overline{OE} \cdot \overline{OA} = \wp_\Gamma O = \overline{OX_1} \cdot \overline{OX_2} ,$$

c'est-à-dire $\overline{OE} \cdot 1 = x_1 \cdot x_2$, d'où l'ordonnée du point B est égale à $\overline{OE} = c$.

La construction suivante ressort ainsi de notre analyse.

La construction de CONWAY et GUY

Soient b et c des réels donnés, de signes quelconques.

Dans le plan Oxy, construire le cercle Γ dont le diamètre a pour extrémités les points $A(0; 1)$ et $B(-b; c)$; les abscisses des points X_1 et X_2 où Γ recoupe Ox sont les racines réelles de l'équation quadratique $x^2 + bx + c = 0$.

La justification de cette construction suit les traces de l'analyse.

Observons que la discussion des trois cas selon le nombre de racines réelles (0, 1, ou 2) peut être basée sur la position du point M projection du centre C de Γ sur Ox par rapport à Γ (extérieur à Γ, sur Γ, ou intérieur à Γ), et donc sur le signe (> 0, $= 0$, ou > 0) de la puissance

$$\wp_\Gamma M = MC^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+c}{2}\right)^2 - \frac{b^2 + (1-c)^2}{4} = -\frac{b^2 - 4c}{4},$$

et l'on voit apparaître le discriminant au numérateur de la dernière expression... ■

Notes

[1] Cette notion est implicite dans les propositions 35 et 36 du Livre III des *Éléments d'Euclide*, *cf.* [3] p. 459-464. Pour les applications classiques de la puissance, on consultera par exemple [2].

[2] Ce produit ne dépend pas non plus de l'orientation choisie sur la droite Δ.

[3] Si X_1 et X_2 sont confondus (cas où l'équation quadratique a une racine double), Γ est le cercle passant par A et tangent à Ox en X_1.

Références bibliographiques

[1] Conway, J. H. et Guy, R. K. (1996). *The Book of Numbers*. New York (NY), Copernicus/Springer Verlag.

[2] Deltheil, R. et Caire, D. (1989). *Géométrie et Compléments*. Sceaux, Éditions Jacques Gabay (réimpression).

[3] Vitrac, B. (1990). *Euclide, Les Éléments*, volume 1, *Introduction générale, Livres I à IV*. Paris, Presses universitaires de France.

Louis-Philippe Giroux
Collège Jean-de-Brébeuf
5625, rue Decelles
Montréal (Qc)
H3T 1W4
lpgiroux@brebeuf.qc.ca