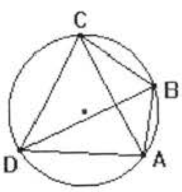
Notes mathématiques

Louis-Philippe Giroux
Collège Jean-de-Brébeuf

Sur le théorème de Ptolémée

On présente dans cette note la démonstration originale de Ptolémée, telle qu'on la trouve au début de son *Almageste,* de cette relation remarquable entre les longueurs des côtés et des diagonales d'un quadrilatère inscriptible du plan dont il est question dans l'article de J. Proulx de ce numéro du *Bulletin.*



Théorème de Ptolémée. — *Dans un quadrilatère inscriptible convexe $ABCD$, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés :*

$$AC \cdot DB = AB \cdot DC + BC \cdot DA\ .$$

Observons qu'en considérant le cas d'un rectangle, la relation de Ptolémée se réduit au théorème de Pythagore : nous sommes en bonne compagnie...

Démonstration (cf. 4, p. 50-51).

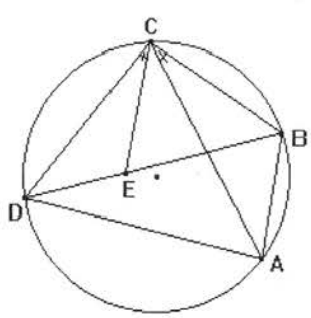


Figure 1

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle. Reportant l'angle formé par la diagonale CA et le côté CB sur le côté CD, on construit le point E sur la droite DB tel que $\angle DCE = \angle ACB$[1] ; ce point se trouve bien sur le segment DB, vu que $\angle ACB$ est plus petit que $\angle DCB$.

Les triangles CAB et CDE sont semblables, car leurs angles en C sont égaux par construction, de même que ceux en D et A, en tant qu'angles inscrits dans le cercle interceptant le même arc BC, d'où

(1) $$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DC}\text{, soit } AB \cdot DC = AC \cdot DE\ .$$

Considérons maintenant une autre paire de triangles, CEB et CDA ; leurs angles en B et A sont égaux (angles inscrits interceptant l'arc DC), ainsi que ceux au sommet commun C, par addition du même angle $\angle ECA$ aux angles égaux marqués en C sur la Figure 1 ; ces triangles sont donc semblables, et l'on obtient

(2) $$\frac{BC}{EB} = \frac{AC}{DA}\text{, soit } BC \cdot DA = AC \cdot EB\ .$$

Les égalités (1) et (2), et le fait que le point E se trouve sur le segment DB, permettent alors de conclure :

$$\begin{aligned} AB \cdot DC + BC \cdot DA &= AC \cdot DE + AC \cdot EB \\ &= AC \cdot (DE + EB) \\ &= AC \cdot DB\ . \end{aligned}$$

CQFD.

Il existe une autre démonstration très élégante, quoiqu'un peu plus sophistiquée, qui exploite une transformation géométrique très utilisée en Géométrie, l'*inversion*, et qui permettrait d'aborder facilement la réciproque ainsi qu'un raffinement du théorème de Ptolémée[2], dont voici l'énoncé :

Théorème (cf. 1, 2). — *Soient A, B, C, D quatre points du plan. Alors, chacun des trois produits suivants*

$$AC \cdot DB, \qquad AB \cdot DC, \qquad BC \cdot DA$$

est inférieur ou égal à la somme des deux autres. De plus, les points A, B, C, D sont situés sur un même cercle ou sur une même droite si et seulement s'il y a égalité entre l'un de ces produits et la somme des deux autres.

Énonçons, en terminant, l'une des généralisations du théorème de Ptolémée, due à A. Cayley (cf. [1], [3]).

Soient $n+2$ points $P_1, P_2, \ldots, P_{n+2}$ dans IR^n $(n \geq 2)$. Une condition nécessaire et suffisante pour que ces points soient situés sur une sphère ou sur un hyperplan est que le déterminant $\left|\overline{P_iP_j}^2\right|_{i,j=1,\ldots,n+2}$ soit égal à 0. ■

Notes

1 Il s'agit d'une égalité d'angles orientés.

2 Cette démonstration pourrait faire l'objet d'une autre *Note mathématique*.

Références bibliographiques

[1] Berger, M. (1977). *Géométrie, volume 2 : espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères.* Paris, CEDIC/Fernand Nathan.

[2] Deltheil, R. et Caire, D. (1989). *Géométrie et Compléments*. Sceaux, Éditions Jacques Gabay (réimpression).

[3] Gregorac, R.J. (1996). *Feuerbach's relation and Ptolemy's Theorem in IR^n*. Geometriae Dedicata, 60, p. 65-88.

[4] Toomer, G.J. (1998). *Ptolemy's Almagest* (traduction et annotations par l'auteur). Princeton (NJ), Princeton University Press.

Louis-Philippe Giroux
Collège Jean-de-Brébeuf
5625, rue Decelles
Montréal (Québec) H3T 1W4
lpgiroux@brebeuf.qc.ca