Jeux et problèmes

Jean M. Turgeon
Université de Montréal

Première partie
Nouveaux jeux et problèmes

Problème 206
Des boeufs, des moutons et des roubles

Un problème du mathématicien russe Pérelman. Deux marchants possédaient en commun un troupeau de boeufs. Ils l'ont vendu et obtenu pour chaque boeuf autant de roubles qu'il y avait de bêtes. Avec cet argent, ils ont acheté un troupeau de moutons, à dix roubles le mouton, et un agneau. Ils ont partagé le troupeau en deux parties égales : un des marchants a reçu un mouton de plus ; l'autre a pris l'agneau et a reçu de son compagnon un supplément correspondant. Quelle était la valeur de ce supplément (en nombre entier de roubles) ?

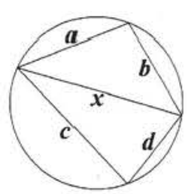
Problème 207
Un carré magique à compléter

Le carré magique partiel ci-dessous peut-il se compléter en un carré magique d'ordre 4 ?

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & \dots & \dots \\ 4 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Problème 208
La diagonale du quadrilatère

Un quadrilatère inscrit dans un cercle a les côtés a, b, c et d et la diagonale x. Démontrer que



$$x^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}.$$

Deuxième partie
Solutions de problèmes déjà posés

Problème 191 (décembre 1999 et décembre 2002)
Les r-ièmes moyennes arithmétiques

Soient x et y deux nombres tels que la r-ième moyenne arithmétique entre x et $2y$ est égale à la r-ième moyenne arithmétique entre $2x$ et y, quand n moyennes arithmétiques ont été insérées dans chaque cas. Démontrer que $ry = (n+1-r)x$.

Des lecteurs m'ont avoué ne pas comprendre l'expression « r--ième moyenne arithmétique ». Je l'ai expliquée brièvement dans le numéro de décembre 2002 du *Bulletin*. Je n'ai reçu aucune solution de lecteurs à ce problème.

Soit d_1 la différence constante entre les termes de la progression arithmétique de n termes entre x et $2y$. Alors, $2y$ est le $(n+2)$-ième terme et on a

$$2y = x + (n+1)d_1$$

ou

$$d_1 = \frac{2y-x}{n+1}$$

et la r-ième moyenne arithmétique est

$$x + r\left(\frac{2y-x}{n+1}\right).$$

Si d_2 est la différence constante entre les termes de la progression arithmétique de n termes entre $2x$ et y, alors y est le $(n+2)$-ième terme et on a

$$y = 2x + (n+1)d_2$$

ou

$$d_2 = \frac{y-2x}{n+1}$$

et la r-ième moyenne arithmétique est

$$2x + r\left(\frac{y-2x}{n+1}\right).$$

Comme les deux moyennes arithmétiques sont égales, on a

$$x + r\left(\frac{2y-x}{n+1}\right) = 2x + \left(\frac{y-2x}{n+1}\right)$$

ou

$$ry = (n+1-r)x.$$

Problème 193 (mars 2000)
Les romans médaillés
(version corrigée, décembre 2002)

Les trois secrétaires, Alice, Béatrice et Cécile, sont d'avides lectrices de romans. Elles aiment bien en discuter entre elles. Alice s'amuse à compiler des statistiques, et prend note des romans lus par chacune des trois. En 1999, elle a lu à elle seule quarante-neuf romans, presque un par semaine. Béatrice en a lu quarante-trois et Cécile en a lu trente-neuf. Elles trouvent qu'un roman mérite une médaille d'or si elles l'ont lu toutes les trois, une médaille d'argent si deux d'entre elles l'ont lu et une médaille de bronze si une seule l'a lu. Si elles ont lu en tout soixante-neuf romans en 1999, démontrer qu'elles ont décerné cette année-là exactement sept médailles de bronze de plus que de médailles d'or.

Michel Béliveau du Collège de Sherbrooke m'a envoyé une analyse très intéressante de la version erronée de ce problème, publiée dans le numéro de mars 2000 du *Bulletin*. On peut déduire de son analyse toutes les façons possibles de corriger l'énoncé du problème.

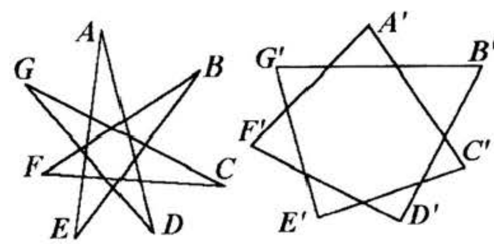
Robert Bilinski et Jacques Sormany m'ont fait parvenir la solution suivante, plus simple que la mienne.

Soit x le nombre des médailles de bronze, y d'argent et z d'or. On a

$$\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 49 + 43 + 39 = 131 \\ x + y + z = 69 \\ \hline y + 2z = 62 \\ x + y + z = 69 \\ \hline x - z = 7 \end{array}$$

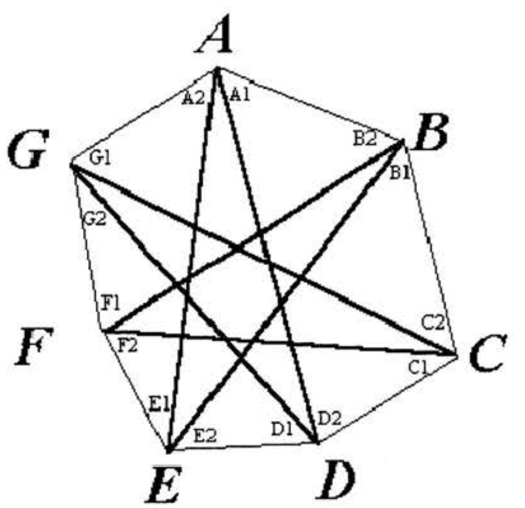
Problème 194 (mars 2000)

Pour chacune des deux étoiles à sept pointes (non inscriptibles dans des cercles) illustrées ci-dessous, calculer la somme des angles situés à leurs sommets.



M. Michel Béliveau a produit une belle solution. Elle consiste à supposer d'abord que l'étoile est inscrite dans un cercle, de sorte que la somme de ses angles est facilement calculée. Dans ce cas, il trouve que la somme des angles est de 180° dans l'étoile AB...G et de 540° dans l'étoile A'B'...G'. Il s'attaque ensuite au problème tel qu'il a été posé en cons truisant l'heptagone AB...G ci-dessous. Il dénote A1, B1, ..., G1, A2, B2, ..., G2 les angles intérieurs formés par un côté de l'hexagone et un côté de l'étoile. Dans les triangles formés d'une pointe et des deux pointes opposées, on a

$$\begin{array}{c} \measuredangle A + \measuredangle E + \measuredangle E2 + \measuredangle D1 + \measuredangle D = 180^\circ \\ \measuredangle B + \measuredangle F + \measuredangle F2 + \measuredangle E1 + \measuredangle E = 180^\circ \\ \measuredangle C + \measuredangle G + \measuredangle G2 + \measuredangle F1 + \measuredangle F = 180^\circ \\ \measuredangle D + \measuredangle A + \measuredangle A2 + \measuredangle G1 + \measuredangle G = 180^\circ \\ \measuredangle E + \measuredangle B + \measuredangle B2 + \measuredangle A1 + \measuredangle A = 180^\circ \\ \measuredangle F + \measuredangle C + \measuredangle C2 + \measuredangle B1 + \measuredangle B = 180^\circ \\ \measuredangle G + \measuredangle D + \measuredangle 2 + \measuredangle C1 + \measuredangle C = 180^\circ \end{array}$$



Pour considérer la somme de ces égalités, nommons

$$S = \measuredangle A + \measuredangle B + \ldots + \measuredangle G,$$
$$S1 = \measuredangle A1 + \measuredangle B1 + \ldots + \measuredangle G1,$$
$$S2 = \measuredangle A2 + \measuredangle B2 + \ldots + \measuredangle G2.$$

Alors, la somme des égalités est

$$S + S + S2 + S1 + S = 7 \times 180^\circ = 1260^\circ.$$

Comme $S + S1 + S2$ est la somme des angles intérieurs de l'heptagone, on a $S + S1 + S2 = 900^\circ$. Ainsi $2S = 1260^\circ - 900^\circ = 360^\circ$ et $S = 180^\circ$.

Le cas de l'étoile A'B'...G' est plus facile. Dans la figure ci-dessous, on a

$$\measuredangle A' = 180^\circ - (180^\circ - \measuredangle D1) - (180^\circ - \measuredangle E1).$$

Ainsi

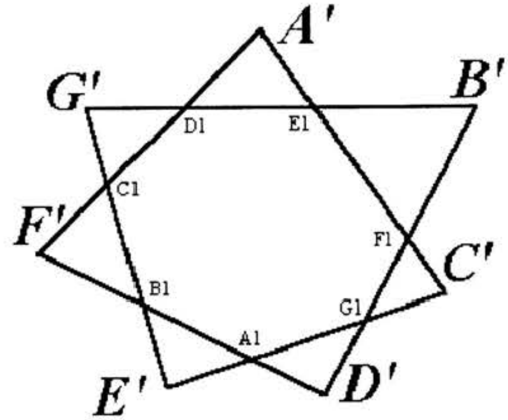
$$\measuredangle A' = \measuredangle D1 + \measuredangle E1 - 180^\circ,$$
$$\measuredangle B' = \measuredangle E1 + \measuredangle F1 - 180^\circ,$$
$$\measuredangle C' = \measuredangle F1 + \measuredangle G1 - 180^\circ,$$
$$\measuredangle D' = \measuredangle G1 + \measuredangle A1 - 180^\circ,$$
$$\measuredangle E' = \measuredangle A1 + \measuredangle B1 - 180^\circ,$$
$$\measuredangle F' = \measuredangle B1 + \measuredangle C1 - 180^\circ,$$
$$\measuredangle G' = \measuredangle C1 + \measuredangle D1 - 180^\circ.$$

Soit

$$S = \measuredangle A + \measuredangle B + \ldots + \measuredangle G$$
$$S1 = \measuredangle A1 + \measuredangle B1 + \ldots + \measuredangle G1 = 900^\circ.$$

Alors

$$S = S1 + S1 - 7 \times 180^\circ = 1800^\circ - 1260^\circ = 540^\circ.$$



Veuillez adresser toute correspondance concernant cette rubrique à :

Jean M. Turgeon (mathématiques)
Université de Montréal
C.P. 6128, succursale Centre-Ville
Montréal (Québec) H3C 3J7
Téléphone : 514-343-7178
Courriel : turgeon@dms.umontreal.ca