Concours de l'Association mathématique du Québec 2003
Ordre collégial

QUESTION 1– L'inverse de l'année

Il est bien connu que $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$. Déterminer deux nombres entiers positifs distincts m et n satisfaisant $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2003}$.

Esquisse de solution

On a successivement,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2003} \\ \Leftrightarrow\ &\frac{m+n}{mn}=\frac{1}{2003} \\ \Leftrightarrow\ &mn-2003(m+n)=0 \\ \Leftrightarrow\ &mn-2003(m+n)+2003^2=2003^2 \\ \Leftrightarrow\ &(m-2003)(n-2003)=2003^2 . \end{aligned}$$

Puisque 2003 est un nombre premier, on peut choisir $m-2003=1$, $n-2003=2003^2$. Ainsi $m=2004$ et $n=2003+2003^2=4014012$, constituent une solution.

QUESTION 2 — Les sommets des paraboles

Dans une étude de trajectoires en aéronautique, on doit décrire la courbe parcourue par le sommet de la parabole d'équation $y=ax^2+bx+c,\ a>0$ lorsque b varie. Quelle est cette courbe ?

Esquisse de solution

Si (h, k) est ce sommet, la parabole a pour équation

$$A(x-h)^2+k=ax^2+bx+c .$$

D'où l'on tire,

$$b=-2ah \text{ et } c=k+ah^2 .$$

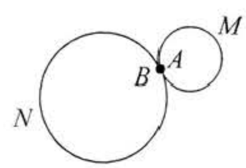
Par conséquent

$$k=c-ah^2 .$$

Ce qui montre que le lieu cherché est une parabole de sommet $(0, c)$ et d'équation $k=c-ah^2$.

QUESTION 3 — Cercles en rotation

Soient M et N des cercles de rayons respectifs m et n (des entiers ≥ 1). Supposons que le cercle M tourne sans glisser autour du cercle N (voir figure) jusqu'à ce que le point A de M retourne sur le point B de N. Combien de tours, autour de son centre, le cercle M aura-t'il fait ?



Esquisse de solution

Les circonférences sont de $2\pi m$ et $2\pi n$. Soit k le plus petit commun multiple de m et n, $k=ppcm(m, n)$. On a alors que $\frac{k}{m}$ et $\frac{k}{n}$ sont des entiers et $2\pi m\frac{k}{m}=2\pi k=2\pi n\frac{k}{n}$. Le point A revient sur le point B lorsque le cercle M tourne $\frac{k}{n}$ fois autour de N et le point A revient $\frac{k}{m}$ fois sur le cercle N.

Un moment de réflexion montre que M aura tourné $\frac{k}{m}+\frac{k}{n}$ fois autour de son centre. Comme $k=\frac{mn}{pgcd\,(m,n)}$ où $pgcd\,(m,n)$ désigne le plus grand commun diviseur de m et n, l'expression peut aussi s'écrire $\frac{(m+n)}{pgcd\,(m,n)}$.

Exemple

Si M est de rayon 8 et N est de rayon 28, alors $pgcd(8,28)=4$, $ppcm\,(8,28)=56$. Le petit cercle M, doit tourner $\frac{56}{8}=7$ fois « sur lui-même » et $\frac{56}{28}=2$ fois « autour de N ». Vérifiez avec de vrais cercles de carton !

vrais cercles de carton !

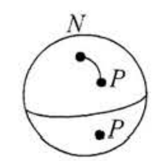
Quelle est, en moyenne, la distance terrestre entre deux points choisis complètement au hasard sur la surface de la Terre ?

Notes

On suppose que la Terre est une sphère parfaite de rayon R et il s'agit d'exprimer la réponse en fonction de R.

La distance terrestre entre deux points est la longueur minimum d'un arc joignant ces deux points tracés sur la surface de la Terre (arc de « grand cercle »).

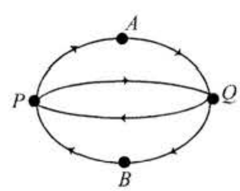
Esquisse de solution



Soient N et P ces deux points aléatoires. Sans perte de généralité, on peut supposer que N est le pôle nord. Comme il est autant probable que P soit situé au nord de l'équateur qu'au sud de l'équateur, la moyenne cherchée est égale à la distance terrestre entre le pôle nord et l'équateur. C'est-à-dire, $\frac{1}{4}$ de la circonférence $2\pi R$ de la Terre. La moyenne cherchée est donc $\frac{\pi}{2}R$.

QUESTION 5 — Voyager par plus de quatre chemins

Combien peut-on tracer de chemins de P à Q en mettant bout-à-bout 12 flèches successives dans la figure suivante ?



Exemple

PAQPQPQBPAQPQ est un tel chemin.

Esquisse de solution

Posons, pour $n \geq 0$,

q_n = nombre de chemins de P à Q ayant n flèches,
a_n = nombre de chemins de P à A ayant n flèches,
b_n = nombre de chemins de P à B ayant n flèches,
p_n = nombre de chemins de P à P ayant n flèches.

On a

$$\begin{aligned} q_n &= a_{n-1} + p_{n-1} && (1)\\ a_n &= p_{n-1} && (2)\\ b_n &= q_{n-1} && (3)\\ p_n &= b_{n-1} + q_{n-1} && (4)\,. \end{aligned}$$

Par (1) et (2) on trouve

$$q_n = p_{n-2} + p_{n-1} \qquad (5)\,.$$

Par (3) et (4) on a

$$p_n = q_{n-2} + q_{n-1} \qquad (6)\,.$$

Par (5) et (6) on a

$$q_n = q_{n-2} + 2q_{n-3} + q_{n-4} \text{ pour } n \geq 4 \qquad (*).$$

Mais $q_0 = 0, q_1 = 1, q^2 = 1, q_3 = 1$. De proche en proche (*), on trouve $q_{12} = 116$.

Remarque

En ajoutant (5) à (6) on découvre que $T_n = p_n + q_n$ satisfait $T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$ avec $T_0 = T_1 = 1$. C'est dire que T_n est le n^e nombre de Fibbonacci F_n ;

$$(F_n)_{n\geq 0} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$$

Une étude plus complète conduit à :

$$q_n = \begin{cases} (F_n - 1)/2 & si \ \ n \equiv 0 \pmod 3 \\ (F_n + 1)/2 & si \ \ n \equiv 1 \pmod 3 \\ (F_n/2 & si \ \ n \equiv 0 \pmod 3) \end{cases}.$$

QUESTION 6 — Curieuse factorisation

Dans une recherche, un expert en communications électroniques doit trouver deux polynômes non constants $p(x)$ et $q(x)$ dont les coefficients sont 0, 1 ou -1 et qui satisfont

$$x^8 - x + 1 = p(x)q(x).$$

Existe-t'il de tels polynômes ? Si oui, quels sont-ils ? Sinon, pourquoi ?

Esquisse de solution

Il est facile de vérifier que $p(x)$ ne peut pas être un polynôme de degré 1, c'est-à-dire, de la forme

$$x, x+1, x-1, -x, -x+1, -x-1.$$

Essayons de trouver $p(x)$ de degré 2. Sans perte de généralité, on peut supposer que

$$p(x) = x^2 + \alpha x + \beta$$

où

$$\begin{cases} \alpha = 0, -1, +1 \\ \beta = -1, +1 \end{cases}$$

car $\beta = 0$ est impossible. La valeur $\alpha = 0$ est aussi impossible car, en essayant de diviser par $x^2 + \beta$, on trouve un reste non nul. En essayant $\alpha = -1$, $\beta = -1$, on trouve encore un reste non nul ; en essayant $\alpha = -1, \beta = 1$, on trouve, après division

$$x^8 - x + 1 = (x^2 - x + 1)(x^6 + x^5 - x^3 - x^2 + 1).$$

Ainsi

$$p(x) = (x^2 - x + 1),\ q(x) = x^6 + x^5 - x^3 - x^2 + 1.$$

Le concours collégial de l'AMQ (2003) a été organisé par une équipe de l'Université du Québec à Montréal (UQÀM), animée par Jacques Labelle en collaboration avec les départements de mathématiques du réseau collégial. L'équipe de l'UQÀM a conçu les problèmes et corrigé les solutions des participants.

L'AMQ remercie Jacques Labelle et son équipe ainsi que les responsables locaux du concours dans les collèges. Enfin, l'AMQ tient à remercier les étudiantes et les étudiants de leur participation et les félicite de leurs succès.

Résultats du concours 2003 — Ordre collégial

Position	Nom	Institution
1	GUAY-PAQUET, Mathieu	CEGEP de Maisonneuve
2	GAUTHIER-SHALOM, Gabriel	Collège Marianopolis
3	LEMIEUX, François	CEGEP Bois-de-Boulogne
4	WANG, Letao	Collège régional Champlain - St-Lambert
5	LAFLAMME-JANSSEN, Jonathan	CEGEP de Saint-Jérôme
6 et 7	MARCOTTE, Étienne	Collège Jean-de-Brébeuf
6 et 7	CHINDELEVITCH, Leonid	Collège Marianopolis
8	VINCENT, Christelle	Collège régional Champlain - St-Lambert
9	MARCHI, Pascal	CEGEP Bois-de-Boulogne
10	TREMBLAY, Nicolas	CEGEP de Chicoutimi
11	LASALLE IALONGO, David	CEGEP Bois-de-Boulogne
12	COMEAU, Josaphat	Collège Jean-de-Brébeuf
13	FIORILLI, Daniel	Collège Lionel-Groulx
14	LUDLOW, Derek	Collège Jean-de-Brébeuf
15	ZI, Zhentao	Collège Marianopolis
16	PLAMONDO, Pierre-Guy	CEGEP Saint-Jean-sur-Richelieu
17	GENDRON, Maxime	CEGEP Saint-Jean-sur-Richelieu
18 à 20	DION, Jean-Michel	Collège de Sherbrooke
18 à 20	ST-YVES, Guillaume	Collège Jean-de-Brébeuf
18 à 20	NAN, Lin	Collège Marianopolis
21	WAN, Tailai	Collège Marianopolis
22	GADOURY, David	CEGEP Bois-de-Boulogne
23 et 24	LAVALLÉE-TREMBLAY, Frédéric	CEGEP de Maisonneuve
23 et 24	FRANCHE, Paul	Collège Lionel-Groulx
25 et 26	CHARBONNEAU-JODOIN, Gabrielle	CEGEP de Maisonneuve
25 et 26	BANVILLE, Pierre Etienne	CEGEP de Sainte-Foy
27 et 28	FORTIN-DE BIGARÉ, Guillaume	CEGEP Édouard-Montpetit
27 et 28	LIRETTE-GÉLINAS, Matthieu	Centre d'études collégiales de Lac-Mégantic