

## Poincaré, Cantor et quelques citations controversées

Julien Constantin  
Université de Sherbrooke

Les politiciens se plaignent souvent d'être mal cités ou qu'on déforme leurs propos.

La chose est plus rare chez les mathématiciens. Pourtant Henri Poincaré (1854-1912) aurait bien des motifs de protester, s'il le pouvait encore...

Parmi ces phrases qui lui sont souvent attribuées et que j'ai entendues ici récemment, trois au moins ont fait l'objet d'un tripotage assez surprenant. Elles sont toutes les trois reliées à la *crise des fondements*, importante controverse qui a secoué les mathématiques vers le début du XX<sup>e</sup> siècle. On se rappelle aisément, à cause de certains paradoxes faciles à saisir, que cette crise touchait la théorie des ensembles, mais elle portait davantage encore sur le rôle de la logique, du formalisme, de l'intuition, ainsi que sur les fondements de la géométrie et de l'arithmétique.

La première et la plus célèbre de ces citations lui fait dire : « Later generations will regard Mengenlehre as a disease from which one has recovered », ou encore « La théorie des ensembles est une maladie dont les générations futures se remettront ».

Déjà, en 1984, l'historien des mathématiques Pierre Dugac remarquait [3] qu'on donnait « des interprétations contestables » du vrai texte de Poincaré. Plus récemment Jeremy Gray, spécialiste de l'histoire des

mathématiques au dix-neuvième siècle et particulièrement de la géométrie non-euclidienne et de Poincaré, a publié un article [4] tout à fait intéressant sous le titre : « Did Poincaré Say " Set Theory is a Disease " ? ». En voici un bref résumé.

Gray annonce son intention de faire valoir que Poincaré n'a jamais fait une telle remarque. Il note en particulier qu'aucune des recherches académiques récentes n'en fait mention. Et qu'on ne l'a pas trouvée dans les textes de Poincaré.

Il entreprend un travail de détective et cherche d'où elle a pu venir. Il trouve, en remontant successivement dans le temps, des mentions chez Kline, E.T. Bell, Pierpont et finalement chez O. Hölder (en 1924 et en allemand). Les références mènent finalement Gray au Congrès International de Mathématiques de Rome en 1908, où la communication de Poincaré sur *L'avenir des mathématiques* aurait causé des remous.

Dans ce travail de Poincaré (voir Dugac [3], p. 77), le texte le plus près de la phrase qui nous préoccupe se lit, parlant de la théorie des ensembles : « on s'est heurté à certains paradoxes, à certaines contradictions apparentes, qui auraient comblé de joie Zénon d'Elée et l'école de Mégare. Et alors chacun de chercher le remède... Quel que soit le remède adopté, nous pouvons nous promettre la joie du médecin appelé à suivre un beau cas pathologique ». On le voit, la remarque de

Poincaré est plutôt optimiste. Et comme l'écrit Gray à ce sujet : « Set theory, by implication, has a disease, but Poincaré did not say that set theory is itself a disease... To a doctor a disease may be interesting, and Poincaré spoke of one's joy at being called to the problem ».

Malheureusement, dans la note de Hölder, le « beau cas pathologique » est rendu par « Poincaré hat auf dem Internationalen Mathematiker-Kongress in Rom im Jahre 1908 gesagt, man werde später auf die Mengenlehre als auf eine überwundene Krankheit zurückblicken (Poincaré au Congrès International de Mathématiques de Rome en 1908 dit qu'on regardera plus tard la théorie des ensembles comme une maladie qu'on a surmontée). Puis Pierpont, se référant à Hölder, écrit « Poincaré at the Rome Congress (1908) went so far as to say " Later generations will regard the Mengenlehre as a disease from which one has recovered " », ce qu'on retrouve exactement par la suite chez Bell et Kline. Re-traduit de nouveau pour nous, en français cette fois, on croira innocemment lire Poincaré dans le texte ! Traduttore, traditore !

On pourrait suggérer que Poincaré n'a pas écrit la fameuse remarque, mais l'a simplement énoncée lors de son exposé au congrès de 1908. Manque de chance pour cette hypothèse : ni Hölder, ni Pierpont, ni Bell n'étaient à la conférence. Et comme Poincaré était malade ce jour-là, c'est Darboux qui a lu son texte...

Une seconde phrase attribuée à Poincaré lui fait dire : « La théorie des ensembles n'est pas stérile, elle engendre des contradictions ». Je l'ai cherchée en vain chez Poincaré. Mais, j'ai trouvé un texte assez voisin qui est probablement le texte original : « La logique n'est plus stérile, elle engendre l'antinomie » (Poincaré [8], p. 316 et [9], p. 211. Voir aussi Mooij [7], p. 85 et Kline [6], p. 204). Bien sûr, à l'époque, les expressions *théorie des ensembles* et *logistique* n'ont pas exactement le même sens qu'aujourd'hui. Selon Mooij ([7], p. 31), pour « parler non seulement de logique formelle, mais aussi de logique mathématique, algorithmique, formalisée et symbolique... le terme « logistique », qui fut proposé lors du Congrès International de Philosophie à Genève (1904) par G. Itelson et L. Couturat, sera accepté ». Quant à l'expression *théorie des ensembles*, elle incluait non seulement ce qu'on

entend aujourd'hui, mais aussi la topologie<sup>1</sup>. En bref, théorie des ensembles n'est pas synonyme de logistique (voir aussi [6]) et je suis persuadé que ce qu'on nous sert aujourd'hui est une re-traduction en français de ce que Poincaré avait écrit ... en français ! Traduttore, traditore !

Un troisième texte attribué à Poincaré est un véritable contre-sens. Pour illustrer l'opposition de Poincaré aux idées de Cantor, on prétend qu'il aurait écrit, à propos de la théorie des ensembles exposée dans [2], « une forme sans substance, quelque chose de répugnant à l'esprit français ». Lorsqu'on retrouve le contexte, on en tire une impression toute différente. Sous la direction de Mittag-Leffler, Poincaré participait à la traduction en français de travaux de Cantor afin d'en faciliter la diffusion. En 1883, dans une lettre à Mittag-Leffler (voir [3], p. 70), il écrit « ... ce qui rendrait la traduction de ce beau mémoire très pénible aux Français, c'est ... le défaut d'exemples un peu concrets. Ainsi ces nombres de la deuxième et surtout de la troisième classe ont un peu l'air d'une forme sans matière, ce qui répugne à l'esprit français. ... Il faudrait pour la (c.-à-d. la traduction) rendre accessible donner quelques exemples précis à la suite de chaque définition, et puis mettre les définitions au commencement au lieu de les mettre à la fin. On permettrait ainsi au lecteur français de comprendre ce beau travail, malgré l'ignorance où il est des recherches antérieures ». Ainsi, loin de considérer comme sans intérêt le travail de Cantor, Poincaré le qualifie par deux fois de beau travail, participe à sa traduction et fait des suggestions pour en faciliter la diffusion.

Pourquoi a-t-on ainsi manipulé la pensée de Poincaré ? Est-ce pour rendre plus dramatique un récit, une présentation ? Les textes de Dugac [3] et de Mooij [7], permettent de constater clairement que Poincaré a évolué et que son opposition parfois vigoureuse à certaines idées cantoriennes est loin d'être aussi simpliste que ce que laisse entendre les soi-disant citations précédentes. Voici quelques observations ou textes que l'on trouve dans Dugac.

- « P. Alexandroff écrit ... que Poincaré fut le premier mathématicien qui comprit aussi bien "l'importance" que la "fécondité" des théories cantoriennes ».

- « Schoenflies avait tout à fait raison d'affirmer... que les idées de Cantor ont commencé à être victorieuses à partir du moment où Mittag-Leffler et Poincaré ont démontré que la théorie des fonctions avait besoin de la théorie des "ensembles de points" ».
- Parlant des mémoires de Cantor et de leur publication dans les *Acta Mathematica*, Mittag-Leffler écrivait à G. H. Hardy le 30 août 1920... « C'est seulement par la publication de tout l'ensemble en français dans les *Acta* qu'ils ont été vraiment connus partout. Hermite les regardait toujours comme des spécialités philosophiques sans valeur réelle. Picard est encore à peu près de la même opinion, mais Poincaré a saisi immédiatement leur portée ».
- Poincaré lui-même, dans un article sur *Les fondements de la géométrie* de Hilbert, écrit : « notre façon de concevoir l'infini s'est également modifiée. M. G. Cantor nous a appris à distinguer des degrés dans l'infini lui-même ».

Notons que si Poincaré a été assez mal cité à propos de Cantor, Cantor lui-même a parfois été mal interprété : on a souvent dit que la démonstration de Cantor [1] sur l'existence des nombres transcendants était non constructive. Comme le remarque Herstein et Kaplansky : « Ce n'est pas vrai. L'idée de Cantor peut être utilisée pour produire un nombre transcendant parfaitement explicite » (cité dans l'introduction de [8]). À ce point que Robert Gray l'a utilisé dans [5] pour écrire un programme d'ordinateur qui génère des nombres transcendants.

Un conseil inspiré de ce qui précède. Si vous trouvez en anglais un extrait d'un texte écrit d'abord en français, il serait prudent de retrouver l'original, plutôt que de simplement retraduire en français...

### Note

<sup>1</sup> Cela explique peut-être la version assez absurde donnée par D. MacHale du texte de Poincaré : « Point-set topology is a disease from which the human race will soon recover ».

### Références bibliographiques

- [1] CANTOR, G. (1874). *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, *J. Reine Angew. Math.*, 77, p. 258-262. Traduction en français : *Sur une propriété du système de tous les nombres algébriques réels*, *Acta Math.* 2 (1883), p. 305-310.
- [2] CANTOR, G. (1883). *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, Teubner, 1883. Traduction de la partie mathématique dans *Fondements d'une théorie générale des ensembles*, *Acta Math.* 2, p. 381-408.
- [3] DUGAC, Pierre (1984). *Georg Cantor et Henri Poincaré*. *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, vol. IV, Fasc. 1, p. 65-96.
- [4] GRAY, Jeremy (1991). *Did Poincaré Say "Set Theory is a Disease" ?* *The Mathematical Intelligencer*, 13(1), p. 19-22.
- [5] GRAY, Robert (1994). *Georg Cantor and Transcendental Numbers*. *American Mathematical Monthly*, Nov. 1994, p. 819-832.
- [6] KLINE, Morris (1975). *Les fondements des mathématiques*. *La Recherche*, N° 54, p. 200-208.
- [7] MOOIJ, J. J. A. (1966). *La philosophie des mathématiques de Henri Poincaré*, Collection de logique mathématique, série A, no 20. Paris, Gauthier-Villars ; Louvain, E. Nauwelaerts.
- [8] POINCARÉ, Henri (1906). *Les Mathématiques et la Logique*. *Revue de Métaphysique et de Morale*, 14, p. 294-317.
- [9] POINCARÉ, Henri (1908). *Science et Méthode*. Paris, Flammarion.

---

Julien Constantin  
 Département de mathématiques et d'informatique  
 Université de Sherbrooke  
 Sherbrooke (Québec) J1K 2R1  
 julien@abacom.com