Louis-Philippe Giroux
Collège Jean-de-Brébeuf

La droite des moindres carrés à moindre effort !

Vincent Papillon
Collège Jean-de-Brébeuf

1. Définition

Étant donnés n points de coordonnées, (x_i, y_i), $1 \le i \le n$, dans le plan cartésien, la ***droite des moindres carrés*** est la droite d'équation $y = a + bx$ pour laquelle la somme

$$\sum_{i=1}^{n} (a + bx_i - y_i)^2$$

est minimale.

---

2. Calcul de la pente et de l'ordonnée à l'origine de la droite des moindres carrés (sans dérivées partielles).

Trouver les nombres a et b qui minimisent la somme $\sum_{i=1}^{n} (a + bx_i - y_i)^2$ revient à trouver les nombres a et b qui minimisent la moyenne $\overline{(a+bx-y)^2}$ prise sur x et y.

Or,

$$\overline{(a+bx-y)^2} - \left(\overline{a+bx-y}\right)^2 = Var(a+bx-y)$$

et donc

$$\begin{aligned}\overline{(a+bx-y)^2} &= Var(a+bx-y)^2 + \left(\overline{a+bx-y}\right)^2 \\ &= Var(a+bx-y) + (a+b\bar{x}-\bar{y})^2 \\ &= Var(bx-y) + (a+b\bar{x}-\bar{y})^2 .\end{aligned}$$

On voit ainsi que l'expression à minimiser, $\overline{(a+bx-y)^2}$, est la somme de deux termes positifs, dont le premier ne dépend pas de a et dont le second terme peut s'annuler en choisissant a, en fonction de b, de la manière suivante : $a = -b\bar{x} + \bar{y}$. Cela montre deux choses : que la droite cherchée passe par le point de coordonnées $(\bar{x}, \bar{y})$, le barycentre, et que maintenant, il suffit de trouver la valeur de b qui minimise le terme $Var(bx-y)$.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}Var(bx-y) &= Var(bx) + Var(-y) + 2Cov(bx, -y) \\ &= b^2 Var(x) + Var(y) - 2bCov(x, y).\end{aligned}$$

La dernière expression obtenue est une expression polynomiale de degré deux en b, toujours positive ou nulle, qui atteint son minimum pour

$$b = \frac{Cov(x, y)}{Var(x)} .$$

Conclusion

$$b = \frac{Cov(x,\ y)}{Var(x)}$$
$$a = -b\bar{x} + \bar{y}\,.$$

Rappels

La définition de la *covariance* est

$$Cov(x,\ y) = \overline{(x-\bar{x})(y-\bar{y})}$$

(comparable à la définition de la variance

$$Var(x) = \overline{(x-\bar{x})^2}).$$

Les propriétés suivantes de la covariance sont des conséquences immédiates de cette définition et des propriétés de la moyenne :

1) $Cov(x,\ y) = \overline{xy} - \bar{x}\ \bar{y}$
(comparable à $Var(x) = \overline{x^2} - \bar{x}^2$).

2) $Cov(ax+b,\ cy+d) = acCov(x,\ y)$
(comparable à $Var(ax+b) = a^2Var(x)$).

3) $Var(x+y) = Var(x) + Var(y) + 2Cov(x,\ y)$.

Vincent Papillon
Collège Jean-de-Brébeuf
vpapillon@brebeuf.qc.ca

Veuillez, s'il-vous-plaît, adresser vos remarques et suggestions concernant cette chronique à :

Louis-Philippe Giroux
Collège Jean-de-Brébeuf
5625, rue Decelles
Montréal (Québec) H3T 1W4
lpgiroux@brebeuf.qc.ca
