Notes mathématiques

Louis-Philippe Giroux
Collège Jean-de-Brébeuf

Une autre démonstration géométrique de la formule de HÉRON

Il s'agit de cette formule classique donnant l'aire d'un triangle à partir des mesures de ses côtés $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

où $$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

désigne traditionnellement le demi-périmètre. La formule, attribuée à Héron, est probablement due à Archimède (*cf.* [1], p. 271).

Notons que les trois facteurs $p-a$, $p-b$, $p-c$, sous le radical, sont bien positifs, étant donné que chaque côté d'un triangle (non « aplati ») est inférieur à la somme des deux autres.

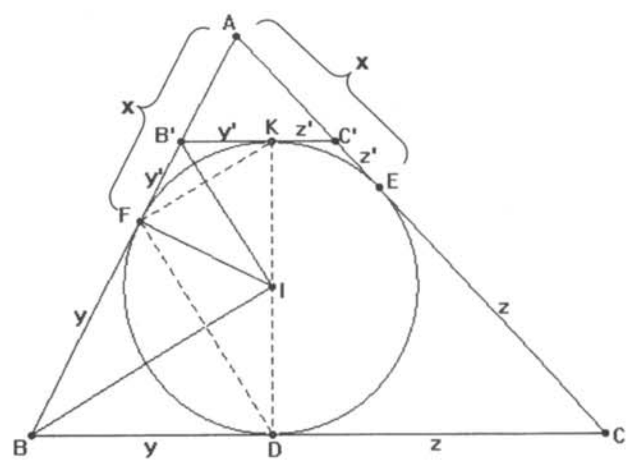
La plupart des auteurs consultés (*cf.* par exemple [2], p.105) obtiennent la formule de Héron en écrivant

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\hat{C} = \frac{1}{2}ab\sqrt{1-\cos^2\hat{C}},$$

et en remplaçant $\cos^2\hat{C}$ par son expression en fonction des côtés tirée de la loi des cosinus :

$$\cos^2\hat{C} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab};$$

il s'agit alors d'effectuer des manipulations algébriques où la géométrie n'intervient plus, et la formule apparaît au terme d'un calcul élaboré. Héron donne de sa formule une démonstration de nature plus géométrique, qui fait notamment intervenir une propriété des quadrilatères inscriptibles, et d'autres relations intéressantes en soi. Voici une autre démonstration dans le même esprit, inédite à ma connaissance, dans laquelle l'algèbre joue quand même un certain rôle, comme dans celle de Héron d'ailleurs.



Désignons par γ le cercle inscrit dans le triangle ABC, de rayon r et centre I (point de concours des bissectrices intérieures) ; γ touche les côtés BC, CA, AB aux points D, E, F, respectivement.

Introduisons les longueurs des segments déterminés sur les côtés par ces points de contact :

$$x=\overline{AE}=\overline{AF},\ y=\overline{BD}=\overline{BF},\ z=\overline{CD}=\overline{CE}.$$

On a clairement $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$, d'où $p=x+z$ et $x=p-a$, $y=p-b$, $z=p-c$; soulignons en passant l'interprétation géométrique des facteurs dans la formule de Héron.

Si l'on trace les trois segments reliant I aux sommets A, B, C du triangle, celui-ci se décompose en trois triangles ayant pour bases respectives les côtés $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ et pour hauteur un rayon du cercle inscrit, ce qui donne

$$S=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr,$$

soit

$$S=pr,$$

une autre formule classique. On a suivi jusqu'ici la démonstration de Héron.

Soient B' et C' les points où la tangente à γ menée par l'autre extrémité K du diamètre passant par D recoupe les côtés AB et AC (cette tangente est parallèle à BC) ; posons

$$y'=\overline{B'K}=\overline{B'F}\ \text{ et }\ z'=\overline{C'K}=\overline{C'E}.$$

On observe que le triangle BIB' est rectangle en I, car les côtés IB et IB' sont les médiatrices des cordes FD et FK, et celles-ci sont perpendiculaires, DK étant diamètre de γ. Puisque le côté BB' est tangent à γ au point F, le rayon IF se trouve être la hauteur issue de I dans ce triangle rectangle, laquelle est donc moyenne géométrique des segments déterminés sur l'hypoténuse :

$$\overline{BF}\cdot\overline{B'F}=\overline{IF}^2,\ \text{soit}\ yy'=r^2.$$

On montrerait de la même manière que $zz'=r^2$. Considérant maintenant les triangles semblables $AB'C'$ et ABC, on obtient, en notant p' le demi-périmètre du premier,

$$\frac{p'}{p}=\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}=\frac{y'+z'}{y+z}=\frac{r^2/y+r^2/z}{y+z}=\frac{r^2}{yz},$$

d'où

$$r=\sqrt{\frac{p'yz}{p}}.$$

Or, p' est la moitié de la somme suivante (voir figure) :

$$\begin{aligned}(\overline{AB'}+\overline{B'K})+(\overline{AC'}+\overline{C'K})&=(\overline{AB'}+\overline{B'F})+(\overline{AC'}+\overline{C'E})\\&=\overline{AF}+\overline{AE}=2x,\end{aligned}$$

c'est-à-dire : $p'=x$. Par conséquent, le rayon du cercle inscrit est

$$r=\sqrt{\frac{xyz}{p}},$$

et l'aire du triangle

$$S=pr=\sqrt{pxyz}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

CQFD.

Références bibliographiques

[1] Knorr, R. K. (1993). T*he Ancient Tradition of Geometric Problems*. New York (NY), Dover.

[2] Lalesco, T. (1987). *La géométrie du triangle*. Sceaux, Éditions Jacques Gabay (réimpression).

Louis-Philippe Giroux
Collège Jean-de-Brébeuf
5625, rue Decelles
Montréal (Québec) H3T 1W4

lpgiroux@brebeuf.qc.ca