Calculatrices et ordinateurs

Jean M. Turgeon
Université de Montréal

TI-89, TI-92 et des théorèmes surprenants

Nous exploiterons les capacités graphiques des calcula trices TI-89 et TI-92 pour discuter d'un théorème que l'on peut non seulement illustrer, mais même démontrer à l'aide de ces deux calculatrices. Nous utiliserons ensuite Cabri Géomètre sur ces calculatrices pour illustrer deux théorèmes de Miquel.

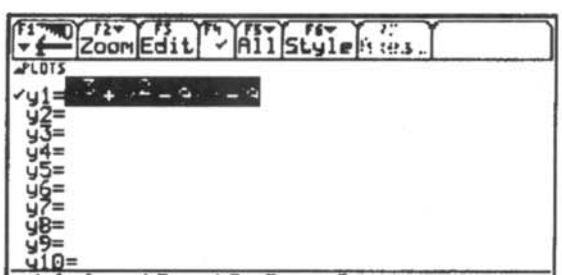
Considérons un polynôme $p(x)$ de degré 3 à trois racines réelles, disons

$$p(x)=(x+3)(x+1)(x-3)=x^3+x^2-9x-9.$$

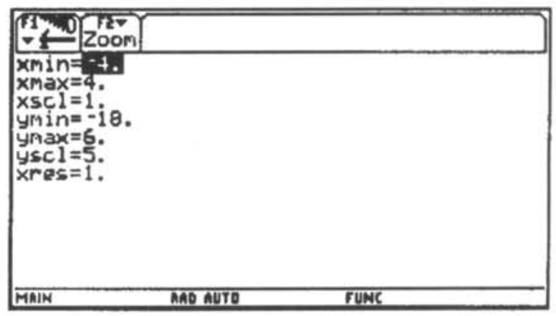
Théorème. Si a, b et c sont les trois racines de $p(x)$ dans un ordre quelconque, alors la tangente de $p(x)$ au point $(a+b)/2$ passe par le point $(c,0)$.

Avant de démontrer ce théorème à l'aide des capacités de calcul symbolique des calculatrices TI-89 et TI-92, utilisons leurs capacités d'affichage graphique pour constater que l'énoncé se vérifie bien dans notre exemple. Dans la fenêtre « Y= », on inscrit

$$y_1 = x\text{^}3+x\text{^}2-9x-9.$$



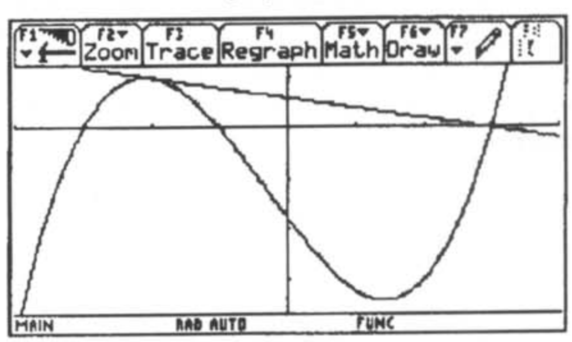
Dans la fenêtre « Window », on inscrit les paramètres suivants :



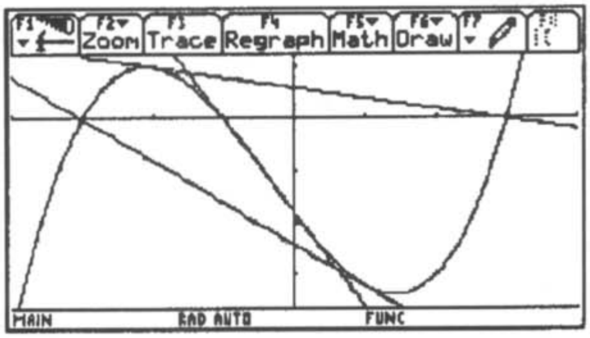
On trouve la fonction « LineTan » dans le catalogue. Dans l'écran principal, on donne la commande

« LineTan $y_1(x)$, – 2 »

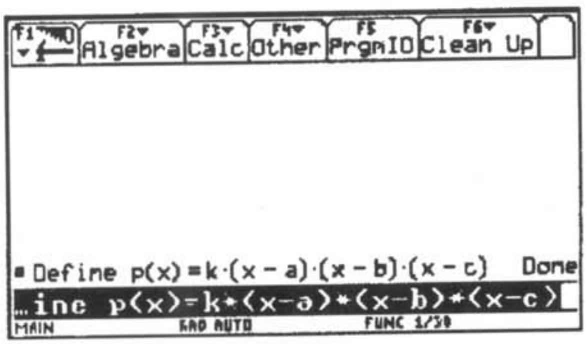
(la variable « y_1 » se trouve au moyen de la commande « VARLINK », au-dessus du bouton de soustraction). La commande « LineTan $y_1(x)$, – 2 » fait passer directement à l'écran « GRAPH », qui donne la figure suivante, où l'on voit clairement que la tangente au point $(-3-1)/2=-2$ passe bien par le point (3,0), où 3 est la troisième racine du polynôme.



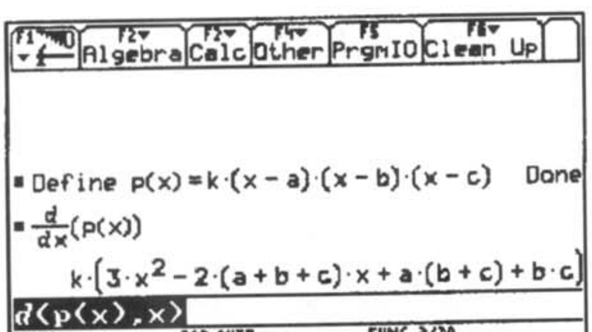
Dans la commande « LineTan $y_1(x)$, – 2 », on remplace – 2 successivement par 1, puis par 0, pour obtenir le graphe suivant, qui contient les trois tangentes dont parle le théorème.



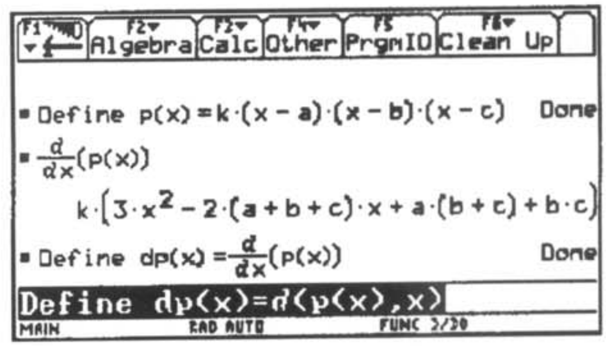
Démonstration du théorème. On définit $p(x)$ dans sa forme la plus générale. À cette fin, on utilise la commande « DEFINE », que l'on trouve dans le catalogue.



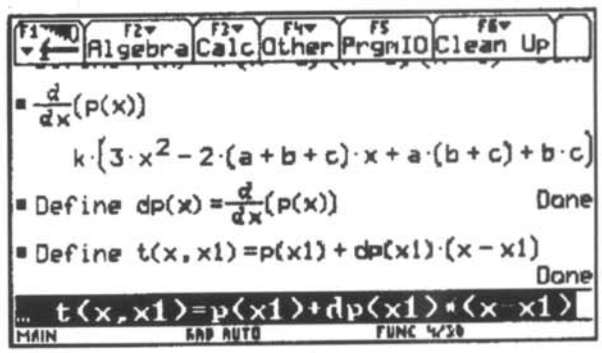
On utilise la commande « d » située au-dessus du chiffre 8 pour faire calculer la dérivée de $p(x)$.



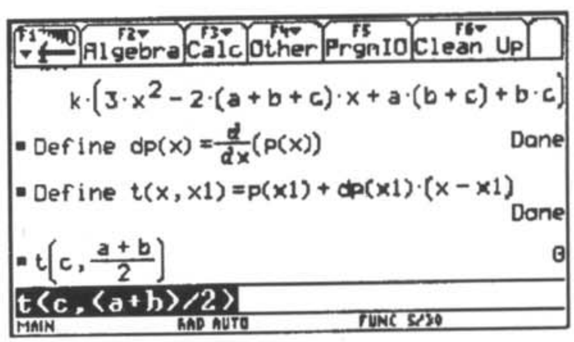
Attention ! Il faut s'assurer que les variables n'ont pas déjà des valeurs. Au besoin, on aura recours à « VAR-LINK » pour s'assurer que a, b et c ne sont pas déjà définies. On définit ensuite la fonction $dp(x)$.



Nous sommes maintenant prêts à définir l'équation de la tangente au graphe de $p(x)$ enun point général x_1.



Il reste à évaluer $t(x, x_1)$ en $x = c$ et $x_1 = (a + b)/2$. On obtient

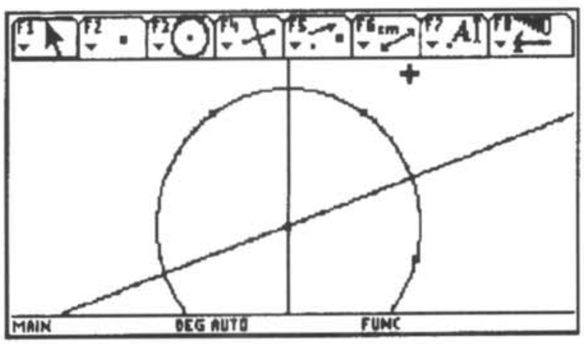


et la tangente de $p(x)$ au point $(a + b)/2$ passe bien par le point $(c,0)$, comme on voulait le démontrer. La démonstration a donc consisté à définir les trois fonctions $p(x)$, $dp(x)$ et $t(x, x_1)$ et à évaluer cette dernière fonction à $x = c$ et $x_1 = (a + b)/2$. Les calculatrices ont effectué tous les calculs fastidieux. Cet exemple provient de l'article de Sally Fischbeck (1998) sur la TI-92.

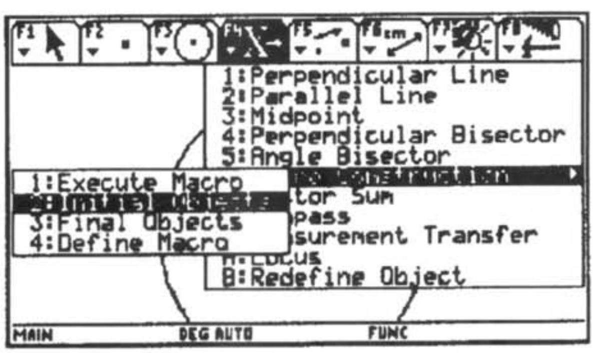
Un premier théorème de Miquel. Le plaisir d'un théorème réside habituellement dans sa démonstration : mais pour cette fois, nous nous contenterons du plaisir de construire la figure du théorème à l'aide de Cabri Géomètre sur nos calculatrices.

En vue de la construction, nous aurons besoin d'une macro. Pour les lecteurs qui ne savent pas comment construire une macro en Cabri Géomètre, je l'explique brièvement.

Notre macro construira le cercle passant par trois points donnés. La première étape consiste à choisir trois points quelconques à l'écran, avec la commande F2,1 de Cabri Géomètre, et à construire leurs médiatrices à l'aide de F4,4. On construit alors avec F3,1, un cercle dont le centre est le point de rencontre des deux médiatrices et qui passe par l'un quelconque des trois points originaux.



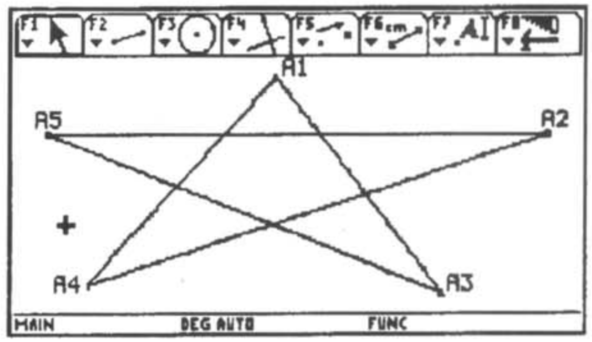
On peut ensuite cacher les deux médiatrices à l'aide de F7,1. Pour définir la macro, on utilise F4,6, qui indique les trois étapes de la définition.



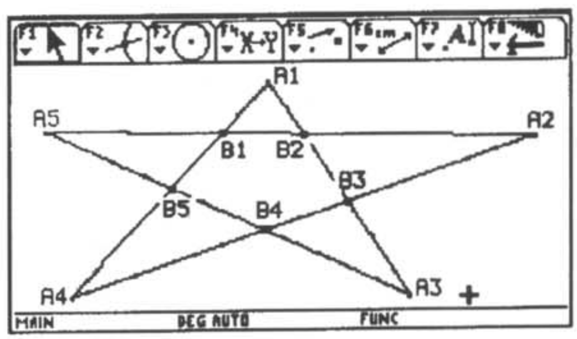
Les objets initiaux sont les trois points choisis. L'objet final est le cercle. On complète la définition de la macro avec F4,6,4, en donnant un nom à la macro. Je l'appelle « cercle3 ». On exécute la macro avec F4,6,1. On indique trois points, et le cercle se dessine immédiatement.

Nous sommes maintenant prêts à construire la figure d'un premier théorème de Miquel.

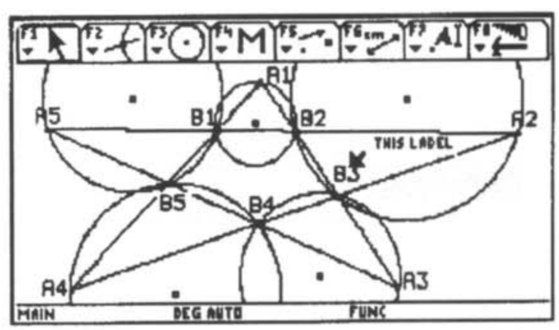
On commence par un pentagone étoilé.



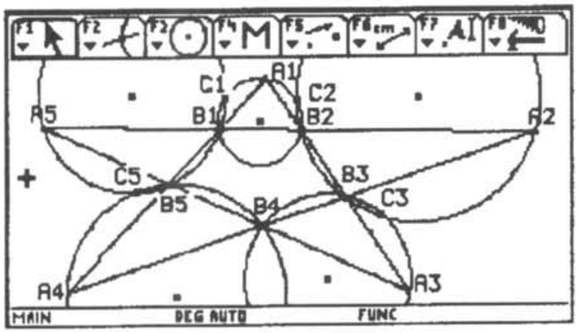
On donne aussi des noms aux sommets du petit pentagone intérieur.



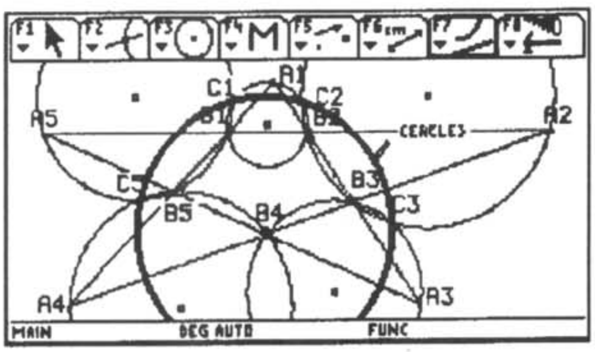
À l'aide de la macro « cercle3 », on construit les cercles A1 B1 B2, A2 B2 B3, ..., A5 B5 B1. On obtient la figure suivante.



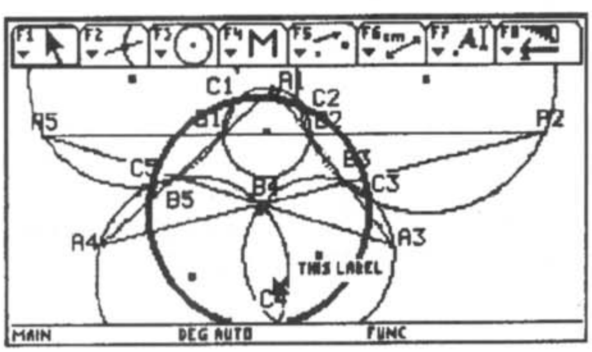
Les cercles A1 B1 B2 et A2 B2 B3 se rencontrent en B2, mais aussi en un autre point, que nous appellerons C2. De même, en est-il des autres paires de cercles voisins, que nous nommerons C1, ..., C5 (le point C4 n'est pas visible).



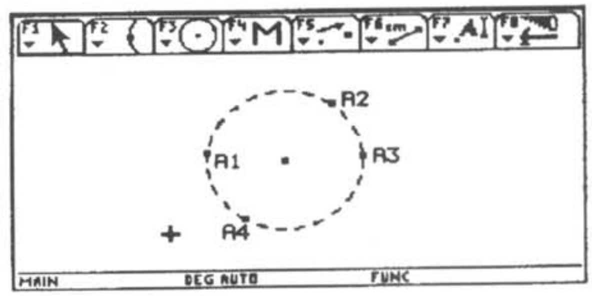
Le théorème de Miquel déclare que les points C1, ..., C5 sont sur un cercle. Pour le vérifier, utilisons de nouveau la macro pour construire le cercle par C1, C2 et C3. Pour le rendre plus visible, on le fera tracer en gras. Il passe bien par C5.



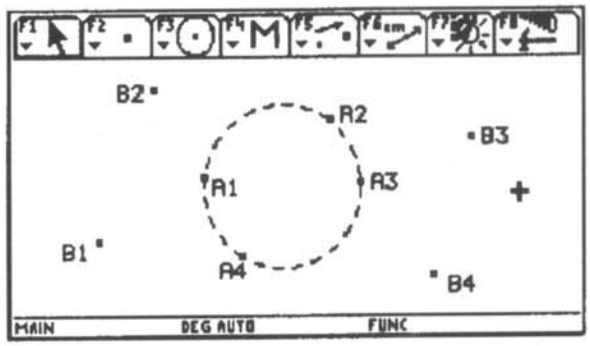
On peut rendre le point C4 visible dans l'écran, en déplaçant avec la petite main les points A3 et A4.



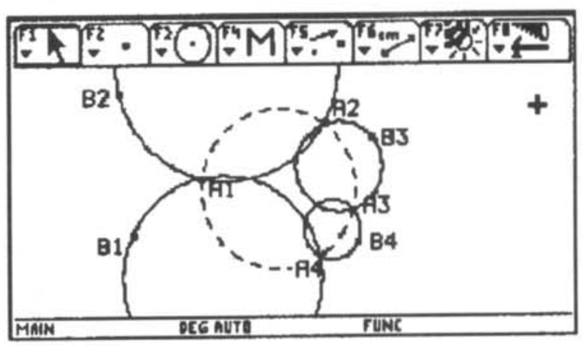
Un autre théorème de Miquel. On considère un cercle sur lequel quatre points, A1, ... , A4, sont marqués.



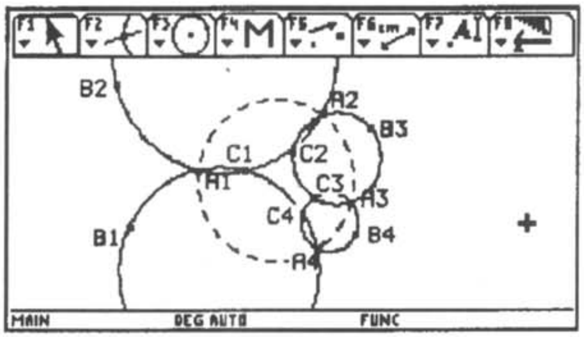
On choisit ensuite quatre autres points, B1, ... , B4, à l'extérieur du cercle.



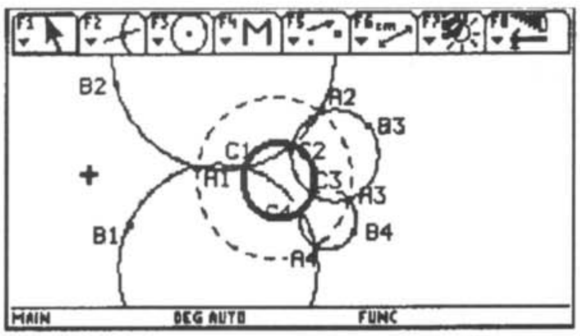
À l'aide de la macro « cercle3 », on construit les cercles B1 A1 A4, B2 A2 A1, B3 A3 A2 et B4 A4 A3.



Alors, les cercles B1 A1 A4 et B2 A2 A1 se rencontrent en A1, mais aussi en un autre point, que nous appellerons C1. On définit C2, C3 et C4 de manière analogue.



Le théorème de Miquel déclare que les points C1, C2, C3 et C4 sont sur le même cercle. On le vérifie à l'aide de la macro. Le cercle par C1, C2 et C3 passe bien par C4.



Ce théorème de Miquel est cité sans démonstration dans le livre de David Wells, [(1991), page 151]. On trouve d'autres théorèmes de Miquel dans l'ouvrage de Coxeter et Greitzer [(1971), page 71], et dans celui de Ross Honsberger [(1995), pages 79-86].

Références bibliographiques

Coxeter, H.S.M. et S.L. Greitzer (1971). *Redécouvrons la géométrie.* Paris, Dunod.

Fischbeck, S. (1988). TI-92 Graphing Calculator (Review). *The College Mathematics Journal* (May 1998), p. 224-230.

Honsberger, R. (1995). Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry. *The Mathematical Association of America New Mathematical Library*, 37, Washington.

Wells, D. (1991) *The Penguin Dictionary on Curious and Interesting Geometry.* London, England, Penguin Books.

Veuillez adresser toute correspondance concernant cette rubrique à :

Jean M. Turgeon
Département de mathématiques
Université de Montréal
Case postale 6128, Succursale Centre-Ville
Montréal (Québec) H3C 3J7
Téléphone : 514-343-7178
turgeon@dms.umontreal.ca
