Jeux et problèmes

Jean M. Turgeon
Université de Montréal

Première partie
Nouveaux jeux et problèmes

Problème 203
Un curé, son vicaire et les âges

Curé au vicaire. Le produit des âges de trois personnes est 2450 et leur somme est le double de votre âge.

Vicaire au curé. Il reste une indétermination.

Curé. C'est vrai. Les trois personnes sont plus jeunes que moi.

Trouver les âges des trois personnes, du curé et du vicaire.

Ce problème m'a été communiqué par le regretté Marcel Bertaud, qui ne m'en a pas révélé l'origine.

Problème 204
Le triangle remué

Ayant observé que le mot « triangle » est composé de huit lettres différentes, Suzanne, qui aime que les choses soient à leurs places, est d'avis que ce mot serait bien plus joli si ses lettres étaient classées en ordre alphabétique. Parce qu'elle aime les défis, elle veut que les lettres s'ordonnent d'elles-mêmes quand elle multiplie le mot par 2. Il n'y qu'une seule solution (en d'autres termes, elle cherche à faire correspondre aux lettres de TRIANGLE les chiffres appropriés pour que le produit

$$\text{TRIANGLE} \times 2 = \text{AEGILNRT}$$

soit vrai. (Cet alphamétique est dû à M. Matthieu Dufour, professeur au département de mathémati ques de l'UQAM.)

Problème 205
Les quatre restes

Trouver le plus petit entier positif n tel que, si on divise n par 42, le reste est 5, si on divise n par 84, le reste est 47, si on divise n par 126, le reste est 89 et si on divise n par 294, le reste est 257.

Notes sur des problèmes déjà posés

Problème 191 (décembre 1999)
Les r-ièmes moyennes arithmétiques.

Soient x et y deux nombres tels que la r-ième moyenne arithmétique entre x et $2y$ est égale à la r-ième moyenne arithmétique entre $2x$ et y, quand n moyennes arithmétiques ont été insérées dans chaque cas. Démontrer que $ry = (n + 1 - r)x$.

Je n'ai reçu aucune solution à ce problème, mais quelques lecteurs m'ont demandé ce que signifie « r-ième moyenne arithmétique ».

On peut définir la moyenne arithmétique b de deux nombres a et c comme suit. Le nombre b est la *moyenne arithmétique* entre a et c si les nombres a, b et c forment une progression arithmétique. De même, les nombres $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont n moyennes arithmétiques insérées entre a et c si les nombres $a, b_1, b_2, \ldots, b_n, c$ forment une progression arithmétique.

Exemple : Inscrire cinq moyennes arithmétiques entre les nombres -4 et 14.

Solution : Si on inscrit cinq moyennes arithmétiques entre -4 et 14, alors -4 sera le premier terme de la progression et 14 sera le septième. Si d est la différence constante de la progression, alors $14 = (-4) + 6d$, de sorte que $d = 3$. La progression est donc $-4, -1, 2, 5, 8, 11, 14$ et les moyennes cherchées sont $-1, 2, 5, 8$ et 11.

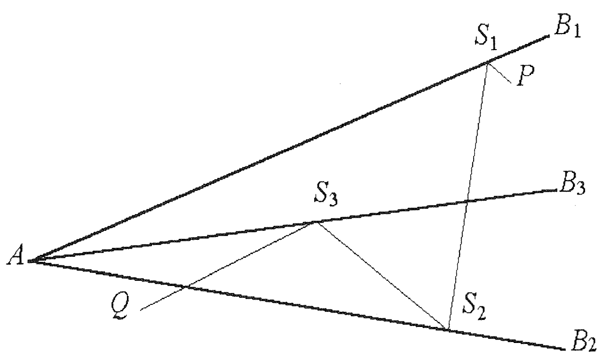
Problème 193 (mars 2000)
Les romans médaillés (version corrigée)

Les trois secrétaires, Alice, Béatrice et Cécile, sont d'avides lectrices de romans. Elles aiment bien en discuter entre elles. Alice s'amuse à compiler des statistiques, et prend note des romans lus par chacune des trois. En 1999, elle a lu à elle seule quarante-neuf romans, presque un par semaine. Béatrice en a lu quarante-trois et Cécile en a lu trente-neuf. Elles trouvent qu'un roman mérite une médaille d'or si elles l'ont lu toutes les trois, une médaille d'argent si deux d'entre elles l'ont lu et une médaille de bronze si une seule l'a lu. Si elles ont lu en tout soixante-neuf romans en 1999, démontrer qu'elles ont décerné cette année-là exactement sept médailles de bronze de plus que de médailles d'or.

Deuxième partie
Solutions de problèmes déjà posés

Problème 190 (décembre 1999)
Le plus court chemin

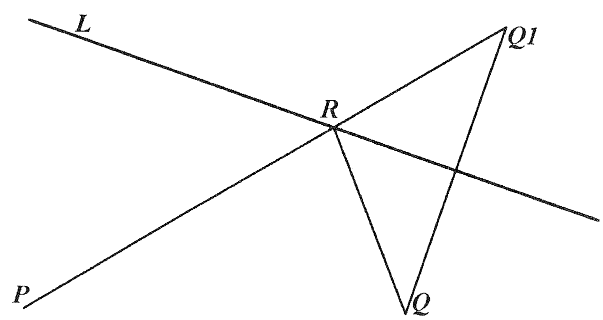
Les droites AB_1, AB_2 et AB_3 se rencontrent en A. Le point P est à l'intérieur de l'angle B_1AB_3 et le point Q est à l'extérieur, au-delà de AB_2.



À l'aide de la règle et du compas, trouver le plus court chemin pour aller du point P au point Q en touchant successivement les droites AB_1, AB_2 et AB_3 (située entre AB_1 et AB_2). Le chemin $PS_1S_2S_3Q$ indiqué sert à clarifier la question mais n'est pas la bonne réponse.

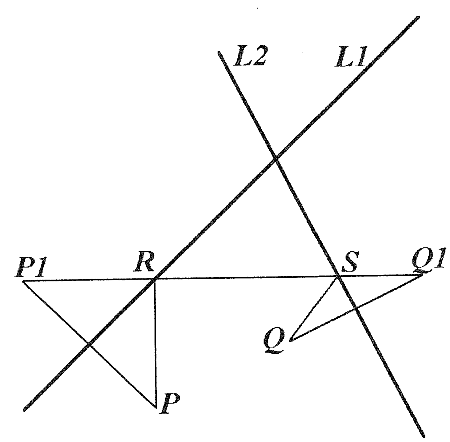
Je n'ai reçu aucune solution à ce problème de la part de lecteurs.

Considérons d'abord le cas le plus simple, celui d'une seule droite, L, et de deux points, P et Q, du même côté de L. On cherche le chemin le plus court qui va de P à Q en touchant la droite L.



Je suppose que tous les lecteurs savent construire avec la règle et le compas le point $Q1$, symétrique de Q par rapport à L. On joint P à $Q1$ par un segment de droite qui rencontre L au point R. Ce segment de droite est, bien sûr, le chemin le plus court de P à $Q1$, et il est de la même longueur que la ligne brisée PRQ, celle que nous cherchons. Aller de P à Q par une chemin qui toucherait L à tout point autre que R serait plus long que PRQ.

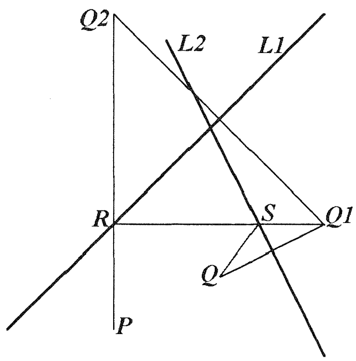
Passons au cas suivant, celui de deux droites, $L1$ et $L2$, à toucher en allant de P à Q.



Une première solution consiste à construire séparément les points symétriques $P1$ de P par rapport à $L1$ et $Q1$ de Q par rapport à $L2$.

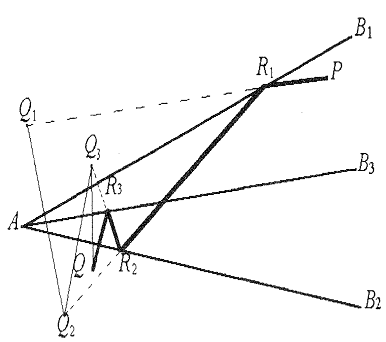
On joint $P1$ à $Q1$ par un segment de droite qui rencontre $L1$ à R et $L2$ à S. Ce segment de droite est, bien sûr, le chemin le plus court de $P1$ à $Q1$, et il est de la même longueur que la ligne brisée $PRSQ$, celle que nous cherchons. Aller de P à Q par une chemin qui toucherait $L1$ à tout point autre que R ou $L2$ à tout autre point que S serait plus long que $PRSQ$.

La première solution est élégante, mais notre seconde solution nous préparera mieux à aborder le cas de trois droites.



On construit d'abord le point $Q1$, symétrique de Q par rapport à $L2$, puis le symétrique $Q2$ de $Q1$ par rapport à $L1$. On joint P à $Q2$ pour déterminer le point R où le segment $PQ2$ rencontre la droite $L1$. On construit ensuite le segment $RQ1$, qui rencontre $L2$ au point S. Alors, le chemin cherché est la ligne brisée $PRSQ$.

Pour résoudre le problème donné, on définit successivement le point Q_3, symétrique de Q par rapport à la droite AB_3, le point Q_2, symétrique de Q_3 par rapport à la droite AB_2, et enfin le point Q_1, symétrique de Q_2 par rapport à la droite AB_1. Le chemin le plus court de P à Q est alors obtenu en se déplaçant dans la direction de Q_1 jusqu'au point R_1 sur la droite AB_1, puis dans la direction de Q_2 jusqu'au point R_2 sur la droite AB_2, dans la direction de Q_3 jusqu'au point R_3 sur la droite AB_3 ; on joint enfin R_3 à Q.



Problème 192 (décembre 1999)
Les multiples de 24 plus 1

Soit n un entier qui n'est divisible ni par 2, ni par 3. Démontrer que n^2 est un multiple de 24 augmenté d'une unité. Exemple : $7^2 = (2 \times 24) + 1$.

J'ai reçu des solutions de Claude Bégin, de Maurice Brisebois, de Luís Lopes (Rio de Janeiro, Brésil) et de Jacques Sormany (Chicoutimi). Toutes ces solutions étaient plus élégantes que celle que je connaissais. Elles se ramènent à ce qui suit.

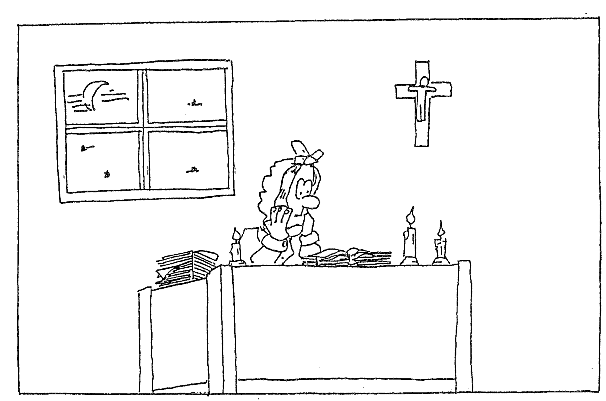
Le problème consiste à démontrer que $n^2 - 1$ est un multiple de 24. On a

$$n^2 - 1 = (n-1)(n+1).$$

Comme n est impair, $n-1$ et $n+1$ sont pairs et l'un des deux est un multiple de 4. Donc, $(n-1)(n+1)$ est un multiple de 8. Comme n n'est pas divisible par 3, exactement un de $n-1$ et $n+1$ l'est. Donc, $n^2 - 1$ est divisible par 24.■

Veuillez adresser toute correspondance concernant cette rubrique à

Jean M. Turgeon (mathématiques)
Université de Montréal
C.P. 6128, succursale Centre-Ville
Montréal (QC) H3C 3J7
Téléphone : 514-343-7178
Courriel : turgeon@dms.umontreal.ca



Blaise Pascal (1623-1662, France)
ou *comment un mal de dents peut faire avancer les mathématiques !*

Quelques années après avoir décidé de consacrer sa vie à la réflexion religieuse, Blaise Pascal est pris d'un mal de dents chronique qui l'empêche de dormir. Il trouve alors un certain réconfort à faire des mathématiques, ce qui l'amène à effectuer ses plus belles découvertes mathématiques.