Jeux et problèmes

Jean M. Turgeon

Première partie
Nouveaux jeux et problèmes

Problème 201
Somme des chiffres divisible par 17

Trouver le plus petit entier positif n tel que la somme des chiffres de n et la somme des chiffres de $n + 1$ sont tous deux divisibles par 17.

Problème 202
La bissectrice inattendue

Sur l'hypoténuse AC d'un triangle rectangle ABC, on construit, à l'extérieur du triangle, un carré dont le centre est P. Démontrer que BP est bissectrice de l'angle ABC.

Deuxième partie
Solutions de problèmes déjà posés

Problème 188
Le triangle équilatéral

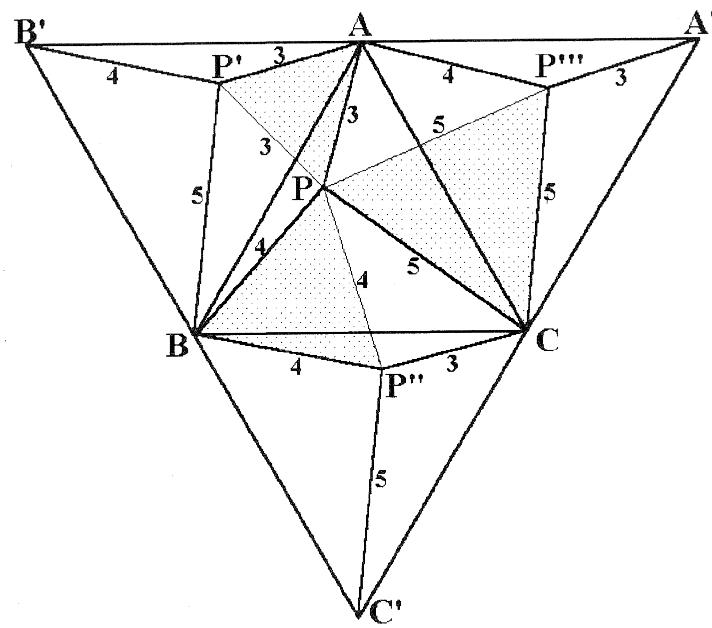
À l'intérieur d'un triangle équilatéral ABC, un point P est situé à 3 cm de A, à 4 cm de B et à 5 cm de C. Calculer la longueur du côté AB.

Le problème nous a valu trois solutions très ingénieuses.

Une de M. Pier-Sébastien Laroche de l'École secondaire Mont-Saint-Bruno. Il arrive à la bonne réponse en montrant d'abord que, si l désigne la longueur du côté AB, alors $5 \leq l \leq 7$. Il obtient ensuite des équations à l'aide de la loi des cosinus, d'où il tire trois valeurs, dont une seule, qui est la bonne réponse, tombe entre 5 et 7.

M. Maurice Brisebois a obtenu la deuxième solution en plaçant le triangle ABC dans un système de coordonnées et en considérant P comme le point de rencontre de trois cercles de rayons 3, 4 et 5 et centrés sur les points A, B et C respectivement, dont il détermine les équations. Son raisonnement, très serré, utilise la loi des cosinus pour arriver à la bonne réponse.

La troisième solution nous provient du Brésil, de M. Luís Lopes. À la différence des deux premières, elle n'utilise que des considérations de géométrie élémentaire.



La construction consiste à effectuer trois rotations de 60° dont les centres sont les sommets A, B et C. La rotation centrée sur A applique le point P sur le point P' et le point C sur B, de sorte que l'angle $P'AP$ est de 60°, que le triangle $P'AP$ est équilatéral de côté 3 et que le triangle $P'BP$ est rectangle puisque ses côtés sont 3, 4 et 5. De plus, le triangle $AP'B$ est l'image de APC et lui est donc congru. L'examen des deux autres rotations montre que l'hexagone $AP'BP''CP'''$ est constitué de trois triangles rectangles de côtés 3, 4 et 5, et de trois triangles équilatéraux de côtés 3, 4 et 5 respectivement. De plus, l'aire de cet hexagone est le double de l'aire du triangle ABC. Comme l'aire d'un triangle équilatéral de côté l est

$$\frac{l^2\sqrt{3}}{4},$$

si l est la longueur du côté AB, on obtient l'équation

$$2\frac{l^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3^2\sqrt{3}}{4}+\frac{4^2\sqrt{3}}{4}+\frac{5^2\sqrt{3}}{4}+3\frac{3*4}{2},$$

ou

$$l=\sqrt{25+12\sqrt{3}}.$$

Problème 189
Les différences répétitives de deux carrés

Calculer $8^2 - 3^2$, puis $78^2 - 23^2$, $778^2 - 223^2$ et $7778^2 - 2223^2$. On obtient successivement 55, 5 555, 555 555 et 55 555 555. On peut continuer ainsi à l'aide d'une calculatrice et de méthodes comme celles qui sont présentées dans *Petites calculatrices, grands nombres* (*Bulletin AMQ*, mars 1999, p. 18 - 21). Plus simplement, démontrer qu'en général, le carré d'un nombre formé de $n-1$ chiffres 7 suivis d'un 8, diminué du carré d'un nombre formé de $n-1$ chiffres 2 suivis d'un 3, donnera toujours un nombre formé de $2n$ chiffres 5.

Pouvez-vous obtenir des nombres formés de $2n$ chiffres 1, ou 2, ou 3, ... comme différences de deux carrés de nombres de la forme *aa...ab* ? De combien de façons ?

Pour répondre à la question, il suffit de noter que

$$77...78^2 - 22...23^2 = (77...78 - 22...23)(77...78 + 22...23) = (55...55)(10...01).$$

M. Claude Laroche, étudiant à l'UQÀM, et M. Charles-Édouard Jean m'ont fait remarquer trois autres cas où ce phénomène se produit :

$$55...56^2 - 44...45^2 = (55...56 - 44...45)(55...56 + 44...45) = (11...11)(10...01),$$

$$66...67^2 - 33...34^2 = (66...67 - 33...34)(66...67 + 33...34) = (33...33)(10...01),$$

$$88...89^2 - 11...12^2 = (88...89 - 11...12)(88...89 + 11...12) = (77...77)(10...01).$$

Veuillez adresser toute correspondance concernant cette rubrique à :

Jean M. Turgeon (Mathématiques)
Université de Montréal
C.P. 6128, succursale Centre-ville
Montréal (Québec) H3C 3J7
Téléphone : (514) 343-7178
Courriel : turgeon@dms.umontreal.ca