Jeux et problèmes

Jean M. Turgeon

Première partie
Nouveaux jeux et problèmes

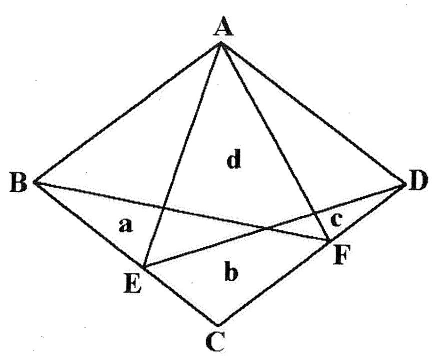
Problème 196
Les multiples d'âges

Mon ami Bernard a eu six fois l'âge de sa fille Angèle du 25 septembre 1970 au 15 mars 1971. Il a eu ensuite trois fois l'âge d'Angèle du 15 mars au 25 septembre 1979. Il a eu deux fois l'âge d'Angèle du 25 septembre 1990 au 15 mars 1991 et, de nouveau, du 15 mars au 25 septembre 1992.

Trouver les dates de naissance d'Angèle et de Bernard. Pendant quelles périodes Bernard a-t-il eu cinq, puis quatre fois, l'âge de sa fille ? Quelles sont les autres périodes de temps où l'âge de Bernard était un multiple de l'âge d'Angèle ?

Problème 197
Des aires dans un losange

On considère un losange $ABCD$. Sur le côté BC, on choisit arbitrairement un point E et, sur le côté CD, on choisit arbitrairement un point F. On joint E à A et à D, puis on joint F à A et à B. Les quatre segments ainsi construits divisent l'intérieur du losange en huit régions. Les lettres inscrites dans quatre de ces régions dénotent leurs aires. Démontrer que



$$a + b + c = d.$$

Problème 198
Les dizaines dans n^2

Soit n un entier positif. Si le chiffre des dizaines dans n^2 est 7, quel est le chiffre des unités ? Quelles sont les valeurs possibles des deux derniers chiffres de n ?

Problème 199
La somme de factorielles

Trouver toutes les solutions de l'équation
$$1! + 2! + \ldots + n! = m^2,$$
où m et n sont des entiers.

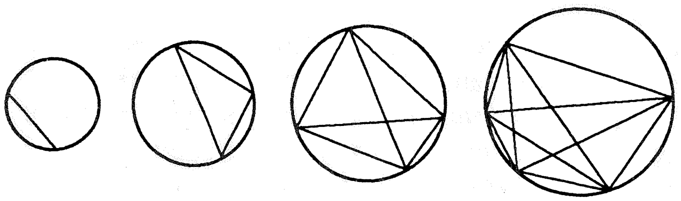
Problème 200
Tous des carrés parfaits

Placer les nombres 1 à 15 sur une rangée de telle manière que la somme de deux nombres consécutifs soit toujours un carré parfait. Y a-t-il plusieurs façons de le faire ?

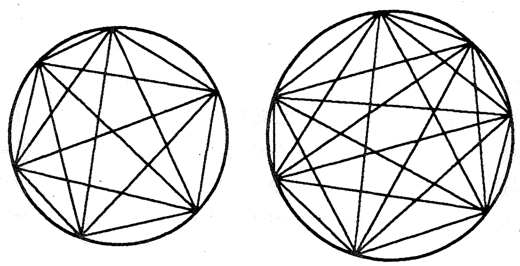
Deuxième partie
Solutions de problèmes déjà posés

Problème 174
Cordes au cou dans un cercle
(Bulletin AMQ, Vol. XXXVIII, no 3, oct. 1998)

On considère les six figures ci-dessous. Il s'agit de polygones inscrits dans des cercles. Ces polygones ne sont pas réguliers, de sorte qu'aucune corde ne passe par un point d'intersection de deux autres cordes à l'intérieur du cercle. Le problème consiste à compter le nombre des régions déterminées par les cordes, en fonction du nombre n des sommets.



2 points 2 régions — 3 points 4 régions — 4 points 8 régions — 5 points 16 régions



6 points 31 régions — 7 points 57 régions

Nous avons déjà publié, dans le numéro de décembre 1998, p. 44, la solution proposée par Charles-Édouard Jean. Cette solution était basée sur un calcul algébrique à partir des valeurs obtenues pour $n = 2, 3, ... 7$, sans considérer l'aspect géométrique du problème. Dans le numéro de mars 1999, p. 35, on trouvait une solution géométrique, inspirée d'un raisonnement de Yaglom et Yaglom et présentée par Maurice Brisebois. Enfin, dans le numéro de mai 1999, nous présentions l'élégante solution de Ross Honsberger dans son livre *Mathematical Morsels* (Dolciani Mathematical Expositions No. 3, M.A.A., 1978, p. 4).

Mais ce n'est pas encore la fin de l'histoire ! Jacques Labelle nous signale qu'il a lui-même publié une solution à ce problème dans le *Bulletin AMQ*, Vol XVIII, mai 1978, p. 33-38. Il avait basé son raisonnement sur la relation d'Euler, dont il donne la démonstration, entre les sommets, les arêtes et les faces d'un graphe planaire. L'article vaut la peine d'être lu !

Problème 186
Les sommes des chiffres
(Bulletin AMQ, Vol. XXXIX, no. 2, mai 1999)

On remplace un nombre écrit en base 10 par la somme de ses chiffres. On répète ce procédé à la somme obtenue jusqu'à ce qu'on arrive à un nombre à un seul chiffre. Par exemple, partant de 9 283, on passe à 22, puis à 4. Si on applique cette opération à tous les nombres n tels que $10^6 \leq n \leq 10^7$, combien de fois le résultat final sera-t-il le nombre 1 ?

Aucun lecteur du *Bulletin AMQ* ne m'a fait parvenir une solution à ce problème. Il devient pourtant très simple si on se rappelle la proposition suivante :

Soit N un entier positif exprimé en base 10, disons $N = \sum_{i=0}^{k} a_i 10^i$. Soit $S(N)$ la somme des chiffres de N : $S(N) = \sum_{i=0}^{k} a_i$. Alors N et $S(N)$ laissent le même reste quand on les divise par 9.

Démonstration. La différence $N - S(N)$ est divisible par 9, puisque l'on a

$$N - S(N) = \sum_{i=0}^{k} a_i\, 10^i - \sum_{i=0}^{k} a_i = \sum_{i=0}^{k} a_i (10^i - 1).$$

Les coefficients de cette dernière expression sont divisibles par 9 : $10^0 - 1 = 0$, $10^1 - 1 = 9$, $10^2 - 1 = 99$, et ainsi de suite. Donc

$$\frac{N - S(N)}{9}$$

est un entier, disons I, et on a

(1) $$N - S(N) = 9I.$$

D'autre part, si on applique l'algorithme de la division à N et à $S(N)$, on obtient des quotients q_1 et q_2 et des restes r_1 et r_2 tels que

$$N = 9q_1 + r_1, 0 \leq r_1 \leq 9$$

et

$$S(N) = 9q_2 + r_2, 0 \leq r_2 \leq 9$$

et

$$N - S(N) = 9(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2).$$

En vertu de (1), on a

$$I = q_1 - q_2 \text{ et } r_1 - r_2 = 0,$$

i.e. $r_1 = r_2$ $\square$

Ainsi le reste de la division d'un entier par 9 est un invariant de l'opération de remplacer cet entier par la somme de ses chiffres.

Si on applique l'opération à tous les nombres n tels que $10^6 \leq n \leq 10^7$, le résultat final sera le nombre 1 exactement 1 000 001 fois.

Problème 187
Les haricots transgéniques

Dans une certaine ferme expérimentale, on étudie les haricots transgéniques. Pour connaître l'influence réciproque des haricots naturels et des haricots transgéniques durant leur croissance, on a divisé un terrain rectangulaire en huit lignes et huit colonnes de petits lots, chacun planté d'une seule des deux sortes de haricots. Un premier document comprenait une grille 8×8, où le directeur du projet a indiqué par un **T** ou par un **N** quelle sorte de haricots on devait planter dans chacun des lots. Un second document notait, pour chaque lot, combien de lots à semences transgéniques lui étaient voisins, par un côté ou par un coin, sans compter le lot lui-même. Mais, une fois l'ensemencement terminé, quelqu'un a mis par mégarde le premier document dans un déchiqueteur à documents ! Veuillez reconstituer la grille du premier document à l'aide de celle du second, si vous le pouvez.

1	2	3	2	3	2	3	2
4	5	5	2	3	2	3	2
1	2	3	3	3	4	4	4
3	5	2	4	1	4	3	2
0	4	2	6	2	5	2	3
1	3	1	4	1	4	1	2
1	3	3	5	4	5	4	3
0	2	1	2	2	2	2	1

La grille du second document

La solution de ce problème exige de l'attention et de la patience. Je félicite donc ceux qui m'ont fait parvenir leurs réponses : Pier-Sébastien Laroche, de l'École secondaire Mont Saint-Bruno, Jacques Sormany, qui s'est contenté du coin inférieur gauche du document 1, et M. Charles-Édouard Jean. Mais, aucune de ces personnes ne m'a envoyé sa façon de procéder pour arriver à la réponse.

Les indices donnés dans le document 2 permettent de reconstituer de manière univoque les six premières colonnes du document 1. Je le fais ci-dessous en dix-sept étapes, de la manière qui me semble la plus efficace possible : une étape de cinq cases, deux de quatre cases, neuf de trois cases, trois de deux cases et deux d'une seule case. On note (i, j), dans les deux documents, la case où se rencontrent la ligne i et la colonne j.

On commence par les deux cases du document 2 qui contiennent le nombre zéro. Du zéro de la case (5,1), on peut conclure que les cases (4,1), (4,2), (5,2), (6,1) et (6,2) du document 1 contiennent le code N. Pour ne pas avoir à répéter vingt-neuf fois une phrase comme celle-ci, je présente le raisonnement sous la forme des tableaux ci-dessous.

	Document 2		Document 1	
Étape	Nombre	Case	Symbole	Cases
1	0	(5,1)	N	(4,1),(4,2),(5,2),(6,1),(6,2)
2	0	(8,1)	N	(7,1),(7,2),(8,2)
3	3	(4,1)	T	(3,1),(3,2),(5,1)
4	4	(5,2)	T	(4,3),(5,3),(6,3)
5	2	(4,3)	N	(3,3),(3,4),(4,4),(5,4)
6	1	(6,3)	N	(6,4),(7,3),(7,4)
7	2	(3,2)	N	(2,1),(2,2),(2,3)
8	5	(2,2)	T	(1,1),(1,2),(1,3)
9	6	(5,4)	T	(4,5),(5,5),(6,5)
10	3	(7,2)	T	(8,1),(8,3)
11	1	(6,5)	N	(5,6),(6,6),(7,5),(7,6)
12	4	(7,5)	T	(8,4),(8,5),(8,6)
13	1	(4,5)	N	(3,5),(3,6),(4,6)
14	5	(2,3)	T	(1,4),(2,4)
15	2	(1,4)	N	(1,5),(2,5)
16	3	(3,5)	T	(2,6)
17	3	(1,5)	N	(1,6)

Pour les six premières colonnes du document 1, on obtient le résultat suivant.

T	T	T	T	N	N		
N	N	N	T	N	T		
T	T	N	N	N	N		
N	N	T	N	T	N		
T	N	T	N	T	N		
N	N	T	N	T	N		
N	N	N	N	N	N		
T	N	T	T	T	T		

Ici, aucune case de la colonne 6 du document 2 ne nous donne un indice univoque sur les symboles à placer dans la septième colonne du document 1. Faisons la conjecture que la case (1,7) du document 1 doit contenir un T. Il suffit de trois étapes pour arriver à une contradiction.

	Document 2		Document 1	
Étape	Nombre	Case	Symbole	Cases
18	2	(1,6)	N	(2,7)
19	4	(3,6)	T	(3,7),(4,7)
20	3	(2,7)	N	(1,8),(2,8),(3,8)

Les nouveaux symboles insérés dans le document 1 donnent le résultat suivant.

T	T	T	T	N	N	T	N
N	N	N	T	N	T	N	N
T	T	N	N	N	N	T	N
N	N	T	N	T	N	T	
T	N	T	N	T	N		
N	N	T	N	T	N		
N	N	N	N	N	N		
T	N	T	T	T	T		

C'est une contradiction, car le document 2 indique que la case (1,8) a deux voisins T alors que, avec notre conjecture, (1,8) a un seul voisin T. On peut donc conclure que la case (1,7) contient un N. Le tableau suivant donne le reste de la démarche, et montre que la solution est unique.

	Document 2		Document 1	
Étape	Nombre	Case	Symbole	Cases
21	2	(2,6)	T	(3,7),(2,7)
22	4	(3,6)	N	(4,7)
23	5	(5,6)	T	(5,7),(6,7)
24	1	(6,7)	N	(5,8),(6,8),(7,7),(7,8)
25	4	(7,7)	T	(8,7),(8,8)
26	3	(5,8)	T	(4,8)
27	3	(4,7)	N	(3,8)
28	4	(3,7)	T	(2,8)
29	2	(2,8)	N	(1,8)

La solution est complète et le document 1 est reconstitué.

T	T	T	T	N	N	N	N
N	N	N	T	N	T	T	T
T	T	N	N	N	N	T	N
N	N	T	N	T	N	N	T
T	N	T	N	T	N	T	N
N	N	T	N	T	N	T	N
N	N	N	N	N	N	N	N
T	N	T	T	T	T	T	T

Veuillez adresser toute correspondance concernant cette rubrique à :

Jean M. Turgeon (Mathématiques)
Université de Montréal
C.P. 6128, succursale Centre-ville
Montréal (Québec) H3C 3J7
Téléphone : (514) 343-7178
Courriel : turgeon@dms.umontreal.ca