La revue des revues

Harry White

Pour cette chronique, j'ai retenu une seule revue qui propose un numéro spécial sur un thème qui n'a rien de nouveau mais qui est toujours d'actualité, soit celui de l'infini. Depuis Aristote jusqu'à nos jours, ce concept qui est à la fois fascinant et mystérieux a fait l'objet d'une grande attention. L'infini est au coeur même des mathématiques, et sa nature parfois contradictoire est à l'origine de plusieurs paradoxes. Cette revue nous convie à un retour sur l'évolution de ce concept.

Pour la science
N° 278 / Décembre 2000
Dossier : ***Les infinis***

Ce numéro thématique contient 20 articles sur les infinis qui recouvrent les divers développements de cette notion au cours de l'histoire tant du point de vue mathématique que philosophique, physique, littéraire et artistique. Comme il serait plutôt laborieux d'étaler tous les articles, je vais décrire ceux qui ont davantage piqué ma curiosité quoique le choix n'était pas facile à faire. C'est le titre qui est notre premier contact, et dans le cas présent, les titres sont tous très invitants, mais il fallait faire un choix.

Le premier article titré « *Les mathématiques, science de l'infini* » développe l'idée de l'infini sous ses aspects potentiel et actuel. En principe, un marcheur peut toujours faire un pas de plus dès qu'il vient d'en faire un. Cette idée de répétition sans limitation conduit à l'intuition première de l'infini potentiel. D'autre part, même si l'on sait qu'il existe une infinité de nombres premiers, il n'y a pas d'algorithme permettant de déterminer celui qui suit le dernier nombre premier connu. Cette situation caractérise l'infini actuel. Le deuxième texte intitulé « *L'infini est-il paradoxal en mathématiques ?* » pose la question à savoir s'il est possible de faire une théorie de l'infini qui évite tout paradoxe et toute incohérence. L'auteur fait la distinction entre un paradoxe qui est la possibilité de démontrer une chose et son contraire, et une situation logiquement insatisfaisante qui apparaît lorsqu'une théorie nous permet d'énoncer des propriétés étonnantes parfois opposées à notre attente, sans toutefois qu'une véritable contradiction apparaisse. L'auteur discute du paradoxe de la réflexivité dans lequel le principe du tout et de la partie indiquant que le tout est plus gros que la partie, y est mis en défaut.

Dans le texte *Histoire d'infini*, l'auteure résume de façon éloquente les étapes de l'évolution de ce concept à partir d'Aristote jusqu'au XIX^{e} siècle, et fait l'historique de l'apparition du signe infini introduit par John Wallis au XVII^{e} siècle. Un autre texte dont le titre est *De la perspective à l'infini géométrique* rappelle un développement majeur survenu au XVII^{e} siècle. Grâce à la géométrie projective, née de l'union de la théorie de la perspective et de la théorie des coniques, l'infini géométrique acquiert une « dimension » humaine, une évidence perceptible. Par la définition et l'usage dans le dessin d'un point de concours de droites en réalité parallèles, les artistes italiens de la Renaissance ont donné le premier exemple de représentation visuelle d'un infini actuel : le point de fuite figure sur le tableau comme un point en réalité situé à l'infini, là où les droites parallèles « se rencontrent ». L'article intitulé *L'infini, pierre de touche du constructivisme*, soulève le débat des mathématiques découvertes versus les mathématiques inventées. L'idée des mathématiques constructives, selon laquelle l'existence d'un objet mathématique n'est établie que lorsqu'on a montré comment le construire, est fondée sur la conviction que les mathématiques sont inventées. Cette définition de l'existence mathématique oppose, depuis plus d'un siècle, constructivistes et formalistes. Les aspects les plus importants de cette controverse apparaissent au cours de l'évolution mathématique du concept d'infini.

Dans *L'infini en géométrie*, l'auteur énumère les différents domaines dans lesquels l'infini joue un rôle important. L'infini est présent sous trois aspects : lorsque l'on considère des objets en nombre infini ; quand on s'intéresse à des espaces de dimension infinie ; quand une opération est répétée un nombre infini de fois. Il donne, entre autres, l'exemple de la démonstration de Pappus dans laquelle on a recourt à une droite à l'infini, et l'exemple de la détermination du volume d'un polyèdre que l'on décompose en tétraèdres de même volume. Pour montrer qu'ils ont un même volume, on a recourt à l'infini. Un autre texte sur *L'analyse non standard* nous présente cette méthode mathématique rigoureuse qui justifie l'utilisation d'équations jugées « illicites » en permettant l'usage de nombres infiniment petits ou grands, réputés inexistants. L'auteur rappelle les cinq étapes importantes de l'histoire de l'infini et de l'infiniment petit ou grand. Dans *L'infini est-il nécessaire ?*, l'auteur traite des suites de Goodstein qui gonflent et grossissent jusqu'à des tailles gigantesques... et diminuent finalement pour atteindre zéro. Pour démontrer cette propriété paradoxale, il est inévitable de faire appel à l'infini.

Un article portant sur *L'infini et l'univers des algorithmes* nous amène à revoir la notion d'algorithme qui est d'abord perçue comme une méthode de calcul donnant un résultat après un nombre fini d'opérations. C'est la forme d'algorithme liée à la récurrence. En 1936, Kleene a introduit un second procédé de calcul nommé « schéma mu » pour lequel le nombre d'itérations est imprévisible, contrairement au calcul par récurrence classique des fonctions récursives primitives. Avec ce modèle de calcul, l'univers des algorithmes s'élargit et, dans certains cas, le calcul se prolonge jusqu'à l'infini et ne donne jamais de résultat. On nomme parfois de tels algorithmes, des semi-algorithmes. L'article intitulé *L'infini est un révélateur* nous montre que l'infini peut être une source d'inspiration. L'exploration d'ensembles hyperinfinis, impossibles à construire, mais concevables, a fait découvrir des objets mathématiques comme les tables de Laver découvertes dans les années 1980. À côté d'opérations usuelles comme l'addition ou la multiplication, qui vérifient des lois simples telles la commutativité et l'associativité, des spécialistes des mathématiques étudient des lois plus exotiques comme l'autodistributivité qui s'exprime par l'égalité $x * (y * z) = (x * y) * (x * z)$ quels que soient les choix des éléments x, y, z. Une opération vérifiant cette opération est distributive par rapport à elle-même. L'intérêt pour ce type d'opérations provient de l'existence d'exemples non triviaux dans le monde mathématique, en liaison notamment avec d'autres structures importantes comme les groupes.

Pour compléter cette rubrique, je mentionne les titres des textes que je n'ai pas décrits mais qui peuvent intéresser les lecteurs et les lectrices : *Archimède face à l'innombrable* ; *L'infini en Chine* ; *Thabit ibn Qurra et l'infini numérique* ; *L'univers infini de Bruno* ; *La science du mouvement au XVIII^e siècle* ; *L'ensemble triadique de Cantor* ; *Les géométries non commutatives* ; *L'infiniment petit en physique* ; *L'infiniment grand* ; *L'infiniment vide n'existe pas* ; *L'infini littéraire*.

Je vous invite à me faire part de tout article ou revue qui aurait un intérêt pour nos lectrices et nos lecteurs. Les suggestions et les commentaires seront également examinés avec beaucoup d'attention. Merci de votre collaboration.■

Harry_White@uqtr.uquebec.ca
ou
Harry White
Département de mathématiques et d'informatique
UQTR
C.P. 500
Trois-Rivières (Québec) G9A 5H7