Jean M. Turgeon

La TI-83 et l'opération pivot

La calculatrice TI-83 est un bon instrument pour la manipulation de matrices de nombres réels. Elle n'admet pas les matrices de nombres complexes. Elle permet de sauvegarder des matrices dans dix variables, de [A] à [J], réservées à cette fin. Ces matrices peuvent comporter jusqu'à 99 lignes et 99 colonnes, si la mémoire n'est pas déjà trop encombrée.

La TI-83 présente quatre fonctions pour les opérations élémentaires sur les lignes : **rowSwap(** pour la transposition de deux lignes, **row+(** pour l'addition d'une ligne à une autre ligne, ***row(** pour la multiplication d'une ligne par un scalaire et ***row+(** pour l'addition à une ligne d'une autre ligne multipliée par un scalaire. Ces quatre fonctions étaient déjà présentes dans la TI-81. La TI-83 possède deux autres fonctions préprogrammées qui agissent sur les lignes d'une matrice : **ref(** (pour *row echelon form*), qui donne la forme échelonnée de la matrice, et **rref((pour** *row reduced echelon form*), qui donne la forme échelonnée réduite de la matrice.

Mon but est de vous présenter un programme qui permet à la TI-83 d'appliquer l'*opération pivot* à une matrice de nombres entiers. Ainsi la TI-83 pourra vous servir à résoudre des problèmes de programmation linéaire à l'aide de la méthode du simplexe. Je donnerai deux autres exemples d'applications pour illustrer l'utilité de l'opération pivot.

L'opération pivot

L'opération pivot porte sur les lignes de la matrice et fait qu'une case choisie, le *pivot*, contient le seul élément non nul de sa colonne. C'est pourquoi on l'appelle *élément distingué* de sa colonne. Si la matrice représente un système de m équations à n inconnues et le pivot est la case (r,s), alors l'opération pivot consiste à isoler la variable x_r, afin de l'exprimer à l'aide des $n-1$ autres variables.

```
PROGRAM:SIMP
dim([B])→L₁:L₁(1)→M:L₁(2)→N
0→L:While L<M:L+1→L
0→C:While C<N:C+1→C
abs([B](L,C))→P
If P≠0:Then
For(I,C+1,N)
abs([B](L,I))→Q
If Q≠0:Then
gcd(P,Q)→P
End:End
If P>1:Then
For(I,1,N)
[B](L,I)/P→[B](L,I)
End:End
N→C
End:End:End
ClrHome
Disp [B]
```

Une fois l'opération pivot effectuée sur une matrice $B = (b_{ij})$, l'élément distingué b_{rs} sera toujours positif, mais pas nécessairement égal à l'unité. Si un lecteur tient à ce que les éléments distingués soient unitaires, il lui suffit de modifier légèrement le programme fourni. Les éléments distingués non unitaires ont l'inconvénient que, une fois les calculs terminés, il faut interpréter les résultats obtenus en divisant, au besoin, chaque ligne de la matrice par l'élément distingué. Je trouve que cet inconvénient est largement compensé par le fait de toujours travailler avec des matrices d'entiers. En effet, la plupart des exercices proposés dans les livres d'algèbre linéaire ou de recherche opérationnelle comportent exclusivement des coefficients entiers. Si on travaille avec une calculatrice et les éléments distingués sont unitaires, alors l'écran se remplit bientôt de décimales et les résultats deviennent très difficiles à lire. Avec la TI-83, on peut bien alors utiliser l'instruction **Frac**, qui affiche les valeurs sous forme d'une fraction simplifiée au maximum, mais l'écran demeure difficile à lire.

Pour éviter les entiers trop grands, je vous fournis aussi le programme *SIMP* (pour *simplifier*, comme on simplifie une fraction). Ce programme divise chaque ligne de la matrice par le plus grand commun diviseur de ses éléments. Je l'inclus comme sous-routine à la fin du programme *PIVOT*. Une fois que vous l'avez introduit dans votre calculatrice, je vous suggère de l'appliquer à la matrice suivante, pour vérifier qu'il fonctionne bien.

$$\begin{bmatrix} 0 & -52 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \\ 32 & 16 & 8 \end{bmatrix}$$

Vous devriez obtenir la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

J'ai appliqué tous les programmes à la matrice [B] de la TI-83. Le lecteur pourra en utiliser une autre, selon son goût.

```
PROGRAM:PIVOT
ClrHome
Disp "SOIT [B] LA MA-"
Disp "TRICE A TRAITER"
Disp " "
Disp "QUELLE EST LA"
Input "LIGNE DU PIVOT ?",I
Disp "QUELLE EST LA"
Disp "COLONNE DU PIVOT"
Input "?",J
If [B](I,J)<0:Then
*row(-1,[B],I)→[B]
End
dim([B])→L1:L1(1)→M
identity(M)→[A]
[A]*[B](I,J)→[A]
For(K,1,M)
[B](K,J)*(-1)→[A](K,I)
End
1→[A](I,I)
[A]*[B]→[B]
prgmSIMP
```

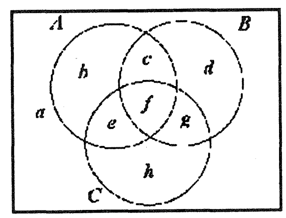
Soit b_{rs} le pivot. Si on décrit l'effet du programme **PIVOT** en fonction des lignes, on peut dire qu'il laisse la ligne r intacte et que, pour i différent de r, il multiplie la ligne i par b_{rs}, puis lui soustrait la ligne r multipliée par b_{is}. Pour le décrire en fonction de chaque élément de la matrice, appelons c_{ij} le nouvel élément de la case (i,j). Alors, tous les éléments de la ligne r restent inchangés. Les autres éléments de la colonne s sont remplacés par des zéros. Pour les autres éléments de la matrice, ceux pour lesquels $i \neq r$ et $j \neq s$, on a

$$c_{ij} = b_{ij}b_{rs} - b_{is}b_{rj}.$$

Premier exemple
Au salon du livre

Considérons le problème suivant (Turgeon, 1998, p. 65).

On pouvait profiter du *Salon du livre* pour s'abonner à des revues à prix réduit. Parmi les visiteurs qui ont acheté des abonnements, 80 % se sont abonnés à *Actualité*, 70 % à *Châtelaine* et 55 % à *Québec Science*. D'après ces données, quels sont le minimum et le maximum du pourcentage des personnes qui se sont abonnées aux trois revues à la fois ?



Il est utile de représenter les données de ce problème dans un diagramme de Venn. Soit A, B et C les ensembles des personnes qui se sont abonnées à *Actualité*, à *Châtelaine* et à *Québec Science* respectivement. On a $a = 0$, puisque le problème ne dit rien des personnes qui ne se sont abonnées à aucune des trois revues. Notre but est de trouver les deux valeurs extrêmes, minimale et maximale, de la variable f. Les données du problème se résument dans les équations suivantes :

$$\begin{aligned} b + c + d + e + f + g + h &= 100, \\ b + c + e + f &= 80, \\ c + d + f + g &= 70, \\ e + f + g + h &= 55. \end{aligned}$$

On représente ces équations dans la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 100 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 70 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 55 \end{bmatrix}.$$

Afin d'exprimer f en fonction des autres variables, on choisira comme pivot la case (1, 5). Le programme **PIVOT** produit la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1^* & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -20 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -30 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -45 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice contient un élément distingué, que je marque d'un astérisque. Il est clair, intuitivement, que la valeur de f est minimale si le pourcentage des personnes qui se sont abonnées à exactement deux revues est élevé. On voudra donc isoler aussi les variables c, e et g. Pour isoler c, utilisons le pivot (4, 2). On obtient la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1^* & 1 & 1 & 55 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -20 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -30 \\ 1 & 1^* & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 45 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice comporte deux éléments distingués. Pour isoler e, utilisons le pivot (3, 4).

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -20 \\ 1 & 0 & 0 & 1^* & 0 & 0 & 1 & 30 \\ 1 & 1^* & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 45 \end{bmatrix}.$$

Finalement, isolons g à l'aide du pivot (2, 6).

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 1^* & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1^* & 1 & 20 \\ 1 & 0 & 0 & 1^* & 0 & 0 & 1 & 30 \\ 1 & 1^* & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 45 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice correspond aux équations

$$\begin{aligned} f &= 5 + b + d + h, \\ c &= 45 - b - d, \\ e &= 30 - b - h, \\ g &= 20 - d - h. \end{aligned}$$

Ces équations montrent clairement que f est minimal, avec la valeur 5, si $b = d = h = 0$.

Alors c, e et g sont maximaux, avec $c = 45$, $e = 30$ et $g = 20$.

Pour trouver la valeur maximale de f, on voudra minimiser c, e et g. Isolons cette fois les variables b, d et h. Pour isoler b, utilisons le pivot (1, 4) pour transformer la dernière matrice obtenue ci-dessus.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1^* & 0 & -1 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1^* & 1 & 20 \\ 0 & -1 & -1 & 1^* & 0 & 0 & 1 & -15 \\ 1^* & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 45 \end{bmatrix}.$$

Isolons d à l'aide du pivot (3, 3).

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1^* & 0 & -1 & 50 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1^* & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1^* & -1 & 0 & 0 & -1 & 15 \\ 1^* & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 30 \end{bmatrix}.$$

Finalement, isolons h à l'aide du pivot (2, 7).

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2^* & 1 & 0 & 105 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2^* & 5 \\ 0 & 1 & 2^* & -1 & 0 & 1 & 0 & 35 \\ 2^* & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 55 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice correspond aux équations

$$\begin{aligned} f &= (105 - c - e - g)/2, \\ b &= (55 - c - e + g)/2, \\ d &= (35 - c + e \,!\, g)/2, \\ h &= (5 + c - e - g)/2. \end{aligned}$$

Ainsi f est maximal, avec la valeur 52,5, si

$$c = e = g = 0.$$

Alors $b = 27{,}5$, $d = 17{,}5$ et $h = 2{,}5$.

Conclusion. Parmi les personnes qui ont acheté des abonnements aux revues, il y en a au moins 5 % et au plus 52,5 % qui les ont prises toutes les trois.

Deuxième exemple
Pgcd de plusieurs polynômes

Le calcul du pgcd de deux polynômes s'effectue généralement à l'aide de l'algorithme d'Euclide. C'est un travail plutôt fastidieux, qui le devient encore davantage s'il y a plus de deux polynômes à traiter.

Des traité anciens, comme celui de Chrystal (1886, I, p. 117) proposent la *méthode de destruction en alternance des coefficients des monômes de plus haut et de plus bas degrés* (*Method of alternate destruction of highest and lowest terms*). Cette méthode est basée sur le théorème suivant.

Théorème. Soient A, B, P et Q des polynômes et soient l, m, p et q des constantes telles que $lq - mp \neq 0$. Si

(1) $$P = lA + mB \text{ et } Q = pA + qB,$$

alors le pgcd de P et Q est égal au pgcd de A et B.

Démonstration. Il découle des équations (1) que tout polynôme qui divise A et B divise aussi P et Q. Par ailleurs, on a aussi

$$qP - mQ = q(lA + mB) - m(pA + qB) = (lq - mp)A$$

et

$$-pP + lQ = -p(lA+mB) + l(pA + qB) = (lq - mp)B,$$

de sorte que tout polynôme qui divise P et Q divise aussi A et B. C.Q.F.D.

Dans le calcul du pgcd, on choisira l, m, p et q de manière à faire disparaître le premier terme de P et le dernier terme de Q. Un exemple rend le procédé facile à comprendre.

Exemple. Soient

$$A = 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - x + 2,$$
$$B = 2x^4 + 3x^2 - x + 3.$$

Définissons

$$A_1 = -2A + 3B = 4x^3 + x^2 - x + 5,$$
$$B_1 = 3A - 2B = 5x^4 - 6x^3 + 6x^2 - x.$$

On peut diviser B_1 par x, puisque x ne divise pas A_1, et ne fait donc pas partie du pgcd cherché. On peut définir plutôt

$$A_1 = -2A + 3B = 4x^3 + x^2 - x + 5,$$
$$B_1 = (3A - 2B)/x = 5x^3 - 6x^2 + 6x - 1.$$

On répète le procédé et on définit

$$A_2 = -5A_1 + 4B_1 = 29(x^2 - x + 1),$$
$$B_2 = (A_1 + 5B_1)/x = 29(x^2 -! x + 1).$$

Le pgcd de A et B est donc $x^2 - x + 1$.

Dans cet exemple, on pouvait aussi définir B_1 à partir de A et de A_1 comme suit :

$$B_1 = (5A - 2A_1)/x = 3(5x^3 - 6x^2 + 6x - 1).$$

Cette remarque permet de simplifier les calculs à l'aide de matrices. La matrice des deux équations données est

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

On cherchera à transformer cette matrice, au moyen d'opérations pivot, de manière que chaque ligne contienne une zéro soit dans la première colonne, soit dans la dernière.

L'opération pivot sur l'élément (1, 1) donne

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

En prenant ensuite (2, 5) comme pivot, on obtient

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Quelle opération sur les matrices correspond à la division par x effectuée dans la définition de B_1 ? C'est une opération que l'on ne trouve pas dans le contexte de l'algèbre linéaire : transférer d'une case vers la gauche les éléments de toute ligne dont le premier élément est un zéro, puis supprimer la dernière colonne de la matrice. Voici une petit programme, que j'ai appelé **TRANSLI**, pour *translation de ligne*, qui permet à la TI-83 d'effectuer cette opération.

```
PROGRAM:TRANSLI
ClrHome
dim([B])→L1:L1(1)→M:L1(2)→N
For(I,1,M)
If [B](I,1)=0:Then
For(J,1,N-1)
[B](I,J+1)→[B)(I,J)
End:End:End
{M,N-1}→dim([B])
Disp [B]
```

Si on applique **TRANSLI** à la dernière matrice ci-dessus, on obtient

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & 6 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Cette fois l'opération pivot sur l'élément (1, 1) donne

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

L'opération pivot sur l'élément (2, 4) donne

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alors **TRANSLI** transforme cette matrice en

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le pgcd est donc $x^2 - x + 1$.

Cette méthode matricielle, que Chrystal ne mentionne pas, a l'avantage de pouvoir traiter un nombre plus grand de polynômes sans difficulté supplémentaire, comme dans l'exemple suivant.

Trouver le pgcd des quatre polynômes

$$30x^4 - 11x^3 - 54x^2 + 41x - 6,$$
$$6x^4 + 29x^3 - 16x^2 - 49x + 30,$$
$$15x^4 + 47x^3 - 125x^2 + 73x - 10,$$
$$10x^4 + 53x^3 - x^2 - 77x + 15\ .$$

Leur représentation matricielle est

$$\begin{bmatrix} 30 & -11 & -54 & 41 & -6 \\ 6 & 29 & -16 & -49 & 30 \\ 15 & 47 & -125 & 73 & -10 \\ 10 & 53 & -1 & -77 & 15 \end{bmatrix}.$$

Pour faciliter la lecture, j'indique seulement l'opération sur la matrice et son résultat.

Pivot : (2,1).

$$\begin{bmatrix} 0 & -6 & 1 & 11 & -6 \\ 6 & 29 & -16 & -49 & 30 \\ 0 & -3 & -10 & 23 & -10 \\ 0 & 2 & 11 & 2 & -15 \end{bmatrix}.$$

Pivot : (1, 5).

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & -1 & -11 & 6 \\ 6 & -1 & -11 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

TRANSLI.

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & -11 & 6 \\ 6 & -1 & -11 & 6 \\ 3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pivot : (1, 4).

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pivot : (4, 1).

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

TRANSLI.

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Pivot : (1, 3).

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pivot : (3, 1).

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

TRANSLI.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pivot : (1,1).

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le pgcd cherché est x – 1.

Qu'arrive-t-il si des polynômes sont relativement premiers ? Cette propriété peut se manifester de deux façons, illustrées par les deux exemples suivants.

Exemple 1. Considérons les polynômes $x - 1$ et $x - 2$. On obtient la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Pivot (1,1).

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pivot (2,2).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

TRANSLI.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pivot (1, 1).

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Le pgcd est donc 1.

Exemple 2. Considérons les polynômes $x^4 - x^2 + 1$ et $x^4 + x^2 + 1$. On obtient la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pivot (1, 1).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ici le procédé ne s'applique plus, car aucune opération pivot ne peut faire que chaque ligne de la matrice comporte un zéro soit à la première colonne, soit à la dernière. On peut conclure que le pgcd est 1.

Si vous avez copié les trois programmes de cette chronique dans votre TI-82 ou TI-83, alors vous pouvez vous amuser à les appliquer aux exercices suivants.

Exercice 1. Calculer le pgcd des quatre polynômes

$$\begin{gathered} x^6 - 1, \\ x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1, \\ x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 4x + 3, \\ 2x^6 - 11x^5 + 9x^4 - 7x^3 - 16x^2 + 14x - 14. \end{gathered}$$

Exercice 2. Calculer le pgcd des quatre polynômes

$$\begin{gathered} x^5 + x^4 + 2x^2 + 1, \\ 3x^5 + 4x^4 + 3x^2 - x + 1, \\ x^5 - x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2, \\ x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 3x^2 -!\, x - 3. \end{gathered}$$

Solutions.

1. $x^2 - x + 1.$

2. $x^3 + 2x^2 + x + 1.$ ■

Références bibliographiques

Chrystal, G. (1886). *Algebra, An Elementary Text-Book for the Higher Classes of Secondary School and for Colleges*. Vol. I, 584 pages ; vol. II, 628 pages. Réimpression en 1964 par Chelsea Publishing Company, New York, N.Y.

Turgeon, Jean M. (1998). *Défis mathématiques pour les jeunes de 15 à 95 ans et leurs parents.* Le Griffon d'argile, Québec, 151 pages.

Veuillez adresser toute correspondance concernant cette chronique à :

Jean M. Turgeon (mathématiques)
Université de Montréal
C.P. 6128, Succursale Centre-Ville
Montréal (Québec) H3C 3J7

Téléphone : 514-343-7178
Couriel : turgeon@dms.umontreal.ca