# Jeux et problèmes

**Jean M. Turgeon**

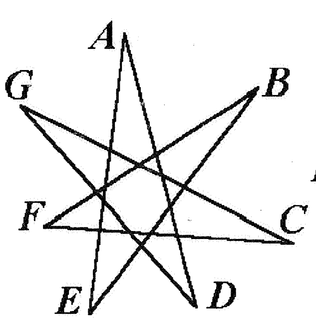
## Première partie
## Nouveaux jeux et problèmes

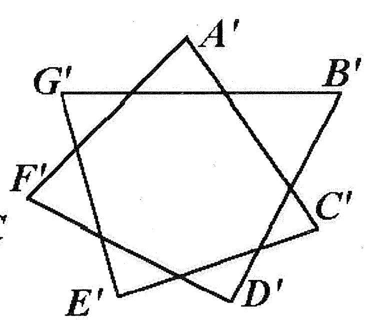
### Problème 193
### Les romans médaillés

Les trois secrétaires, Alice, Béatrice et Cécile, sont d'avides lectrices de romans. Elles aiment bien en discuter entre elles. Alice s'amuse à compiler des statistiques, et prend note des romans lus par chacune des trois. En 1999, elle a lu à elle seule quarante-neuf romans, presque un par semaine. Béatrice en a lu quarante-trois et Cécile en a lu trente-neuf. Elles trouvent qu'un roman mérite une médaille d'or si elles l'ont lu toutes les trois, une médaille d'argent si deux d'entre elles l'ont lu et une médaille de bronze si une seule l'a lu. Si elles ont lu en tout cent cinquante-trois romans en 1999, démontrer qu'elles ont décerné cette année-là exactement vingt-deux médailles de bronze de plus que de médailles d'or.

### Problème 194
### Les étoiles à sept pointes

Pour chacune des deux étoiles à sept pointes (non inscriptibles dans des cercles) illustrées ci-dessous, calculer la somme des angles situés à leurs sommets.




### Problème 195
### Le système avec carrés et produit

Trouver toutes les paires de valeurs de $x$ et de $y$ qui satisfont au système

$$x^2 + y^2 = 40 \text{ et } 3x + 3y = 2xy.$$

## Deuxième partie
## Solutions de problèmes déjà posés

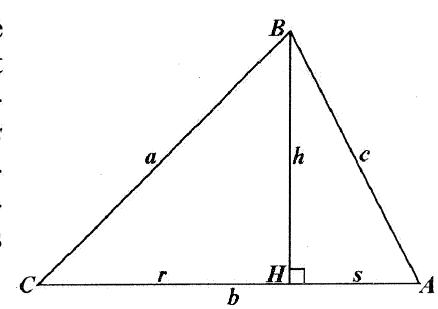
### Problème 181
### Un triangle à construire avec la règle et le compas (Bulletin AMQ, Vol. XXXIX, numéro 1, 1999)

Construire un triangle connaissant sa base, le pied de sa hauteur sur cette base et la différence, non nulle, des deux autres côtés.

J'ai reçu deux solutions de ce difficile problème. Une, que vous trouverez ci-dessous, de M. Paul Lavoie du Collège de Sherbrooke, et une de M. Luís Lopez de Rio de Janeiro, Brésil. M. Lopez est un expert en constructions géométriques et l'auteur du livre *Manuel de construction de triangles*. Sa solution utilise une notation inhabituelle, qui la rend difficile à lire. J'ai communiqué avec M. Lopez pour demander des éclaircissements. J'espère pouvoir publier sa solution dans une prochaine chronique.

#### Solution proposée par Paul Lavoie

Soit $ABC$ le triangle à construire et soit $BH$ sa hauteur. Notons $a$, $b$, $c$, $h$, $r$ et $s$ les diverses longueurs correspondantes, comme dans la figure ci-contre.



En vertu du théorème de Pythagore, on a

$$h^2 + r^2 = a^2$$

et

$$h^2 + s^2 = c^2.$$

On en déduit que

$$r^2 - s^2 = (a^2 - h^2) - (c^2 - h^2) = (a^2 - c^2)$$

c'est-à-dire que

$$(r - s)(r + s) = (a^2 - c^2)$$

ou

$$r - s = \frac{a^2 - c^2}{r + s} = \frac{a^2 - c^2}{b}.$$

Comme $a^2 - c^2 = (a - c)(a + c)$, on peut écrire l'égalité précédente sous la forme

$$\frac{b}{a - c} = \frac{a + c}{r - s}.$$

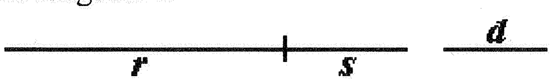
On connaît la base $b$ du triangle et la pied $H$ de sa hauteur. On connaît donc aussi $r$ et $s$. On connaît aussi la différence $d = a - c$ des deux autres côtés du triangle. La seule donnée manquante de l'équation ci-dessus est la somme $a + c$. C'est elle qu'il faut construire avec la règle et le compas. Retranchant $d$ de $a + c$ on obtiendra $2c$ puisque

$$a + c - d = (a + c) - (a - c) = 2c.$$

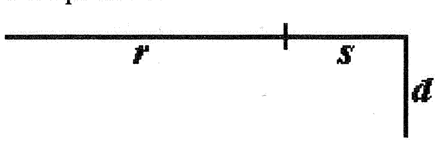
On peut alors obtenir $c$, et ensuite $a$, puisque

$$c + d = c + (a - c) = a.$$

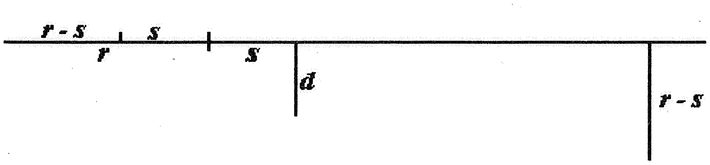
Voici le détail de la construction avec la règle et le compas. Étape 1 : on a un segment de longueur $r + s$ et un autre de longueur $d$ :



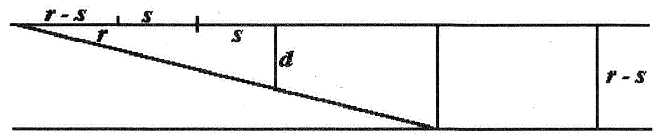

On place le second segment perpendiculairement à l'extrémité du premier :



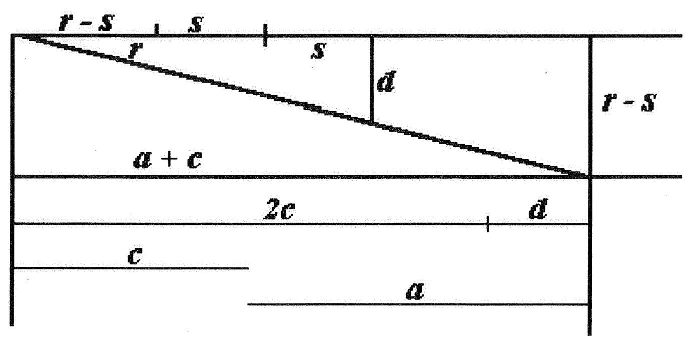

On détermine ensuite $r - s$, que l'on reproduit perpendiculairement au prolongement du segment $r + s$.




On construit une parallèle au segment, puis une diagonale comme suit :



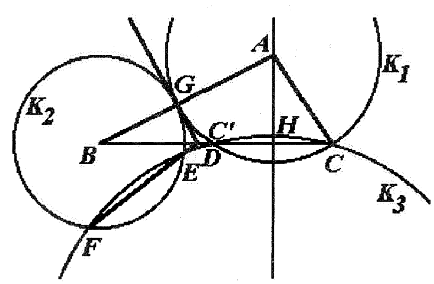

Le reste consiste à considérer les triangles semblables et à conclure :




Les longueurs $a$ et $c$ sont maintenant connues.

**Solution du livre *Cours de géométrie, classe de 2^e^ et de 1^ere^, Livre du maître*, par *une réunion de professeurs* (il s'agit en fait des Frères des Écoles chrétiennes de France), Ligel, Paris, 1967, p. 225.**

« Supposons $AB > AC$. Soit $C'$ le symétrique de $C$ par rapport au pied $H$ de la hauteur. Le sommet $A$ est le centre du cercle passant par $C$ et $C'$ et tangent au cercle de centre $B$, qui a pour rayon la dif férence des deux côtés donnés. On trace le cercle auxiliaire $CC'EF$. La corde $EF$ détermine $D$, d'où $DG$ tangente au cercle de centre $B$. Le rayon $BG$ détermine $A$ sur la hauteur. »




### Problème 183
### Le jeu des pions
### (Bulletin AMQ, Vol. XXXIX, numéro 1, 1999)

Le jeu des pions se joue à deux joueurs, que nous appellerons Bernard et Gaston. Ils disposent d'une bande de quinze carrés, numérotés de 1 à 15, et de quinze pions dans une boîte. Au départ, aucun pion n'est posé sur la bande. Bernard et Gaston jouent à tour de rôle. Bernard commence. À chaque coup, il peut prendre au plus six pions dans la boîte et les disposer sur les cases libres de son choix. Puis c'est le tour de Gaston, qui peut enlever de la bande un nombre quelconque de pions, à la condi tion qu'ils soient sur des cases consécutives. Gaston doit enlever au moins un pion, et il remet dans la boîte les pions qu'il a enlevés. Est--il possible, pour Bernard, de poser tous les pions sur la bande, quel que soit le jeu de Gaston ? Si oui, quel est le nombre minimum de coups par lesquels il peut y arriver ?

Nous avons reçu des solutions de ce problème de la part de M. Sylvain Bérubé de l'Université de Sherbrooke et de M. Pascal Turbis. Tous deux suggèrent que Bernard commence par placer des pions dans les cases de rangs impairs comme suit :

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | | X | | X | | X | | X | | X | | | | |

D'après les règles, Gaston peut enlever un seul pion. Alors, à son deuxième tour à jouer, Bernard replace le pion que Gaston vient d'enlever, puis il en place un dans la case 13 et un dans la case 14.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | | X | | X | | X | | X | | X | | X | | X |

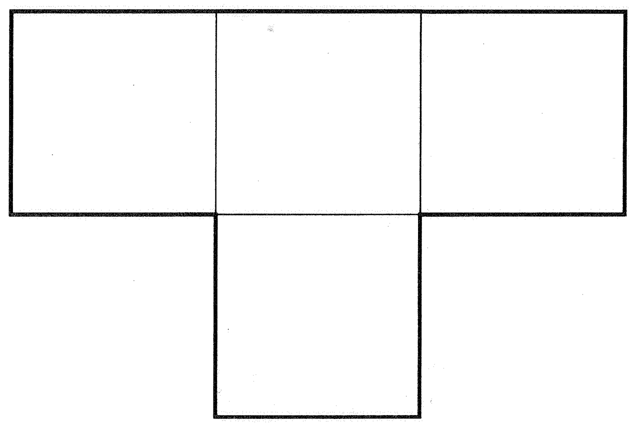
De nouveau, Gaston ne peut enlever qu'un seul pion. À son troisième tour à jouer, Bernard replace le pion que Gaston vient d'enlever, puis il en place un dans chacune des cases 2, 6, 10 et 14, créant la situation suivante.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X | | X | X | X | | X | X | X | | X | X | X |

Cette fois, Gaston peut enlever trois pions. À son quatrième tour, Bernard replace les trois pions que Gaston vient d'enlever, puis il place les trois qui lui restent dans les cases 4, 8 et 12. Alors, toutes les cases sont occupées et Bernard a réussi à placer tous les pions sur la bande.

**Problème 184**
**Recouvrir un échiquier de tétraminos**
**(Bulletin AMQ, Vol. XXXIX, numéro 1, 1999)**

Peut-on recouvrir exactement les cent cases d'un échiquier $10 \times 10$ à l'aide de tétraminos en forme de T, comme celui qui est illustré ci-dessous, et qui recouvre quatre cases de l'échiquier ?



Pascal Turbis nous a envoyé une solution intéressante, qui considère les façons de disposer les tétraminos le long des côtés de l'échiquier. Il distingue cinq cas et démontre que chacun fait apparaître des cases qui ne pourront jamais être recouvertes par des tétraminos en forme de T.

Un autre approche consiste à prendre en compte le fait que les cases de l'échiquier sont noires ou blanches. Il faudra vingt-cinq tétraminos pour couvrir les cent cases de l'échiquier. Or, un tétramino en forme de T couvre soit trois cases blanches et une noire, soit trois noires et une blanche. Il est donc impossible de recouvrir l'échiquier avec un nombre impair, vingt-cinq, de tétraminos.

**Problème 185**
**Les points dans un disque**
**(Bulletin AMQ, Vol. XXXIX, no 1, 1999)**

Quel est le plus grand nombre de points que l'on peut placer strictement à l'intérieur d'un disque de rayon 1, si la distance minimale séparant deux de ces points doit être plus grande ou égale à 1 ?

La solution que je présente ici est essentiellement celle de M. Pascal Turbis.

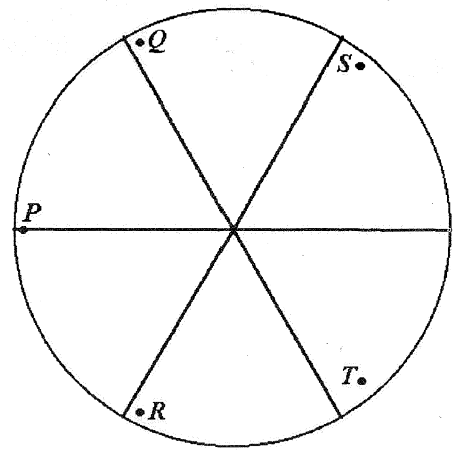
On peut commencer par disposer trois points de façon que chacun soit à la distance 1 de chacun des deux autres, comme les sommets d'un triangle équilatéral. Un tel triangle peut facilement être contenu à l'intérieur d'un cercle de rayon $(\sqrt{3})/4$ concentrique à un cercle de rayon 1.

Joignons deux de ces triangles par un côté commun. La nouvelle figure peut être inscrite dans un cercle de rayon $(\sqrt{3})/2$ concentrique à un cercle de rayon 1.

Ne serait-il pas plus simple de tracer un carré de côté 1 ? Cette figure peut être inscrite dans un cercle de rayon $(\sqrt{2})/2$ concentrique à un cercle de rayon 1 et même au cercle de rayon $(\sqrt{3})/2$.

Examinons le cas de six points. Ces six points formeraient un hexagone constitué de six triangles équilatéraux de côté 1. Or, cet hexagone serait inscrit dans un cercle de rayon 1, de sorte que les six points ne seraient pas strictement à l'intérieur du cercle. Si ce cas était valable, on pourrait ajouter un septième point : le centre du cercle.

Pour achever de nous convaincre qu'on ne peut placer six points, considérons le cercle de rayon 1 divisé en six secteurs égaux par trois diamètres. Plaçons un point $P$ sur un de ces diamètres, près du cercle. On ne peut placer aucun autre point dans les deux secteurs adjacents à $P$. Plaçons des points $Q$ et $R$ dans les secteurs voisins des secteurs adjacents à $P$, près des diamètres et près du cercle. Alors, il est possible de placer des points $S$ et $T$ dans les deux secteurs non encore utilisés. Ce raisonnement nous a donc fourni une solution au problème avec cinq points. Le plus grand nombre de points est donc cinq.




Veuillez adresser toute correspondance à :
Jean M. Turgeon (Mathématiques)
Université de Montréal
C.P. 6128, succursale Centre-ville
Montréal (Québec) H3C 3J7
Téléphone : (514) 343-7178

## Retrouvailles CRPM et PERMAMA
## 17 et 18 juin 2000

Toutes les personnes (gestionnaires, professeurs, animateurs, étudiants) qui ont participé à l'un ou l'autre de ces projets sont invitées à se joindre à ces retrouvailles dont les activités se dérouleront au Château Bonne-Entente à Ste-Foy.

Pour avoir de plus amples informations, communiquez avec le comité organisateur de ces retrouvailles et profitez-en pour nous transmettre vos coordonnées (adresse, téléphone et courriel) :

**Boîte vocale** : *(514) 840-2747 poste 5615* ou *(418) 657-2262 poste 5615*
**Courriel** : *permama@teluq.uquebec.ca*

**Merci de nous aider à vous rejoindre !**

**Le comité organisateur**