Jeux et problèmes

Jean M. Turgeon

Première partie
Nouveaux jeux et problèmes

Problème 187
Les haricots transgéniques

Dans une certaine ferme expérimentale, on étudie les haricots transgéniques. Pour connaître l'influence réciproque des haricots naturels et des haricots transgéniques durant leur croissance, on a divisé un terrain rectangulaire en huit lignes et huit colonnes de petits lots, chacun planté d'une seule des deux sortes de haricots. Un premier document comprenait une grille 8×8, où le directeur du projet a indiqué par un **T** ou par un **N** quelle sorte de haricots on devait planter dans chacun des lots. Un second document notait, pour chaque lot, combien de lots à semences transgéniques lui étaient voisins, par un côté ou par un coin, sans compter le lot lui-même. Mais, une fois l'ensemencement terminé, quelqu'un a mis par mégarde le premier document dans un déchiqueteur à documents ! Veuillez reconstituer la grille du premier document à l'aide de celle du second, si vous le pouvez.

1	2	3	2	3	2	3	2
4	5	5	2	3	2	3	2
1	2	3	3	3	4	4	4
3	5	2	4	1	4	3	2
0	4	2	6	2	5	2	3
1	3	1	4	1	4	1	2
1	3	3	5	4	5	4	3
0	2	1	2	2	2	2	1

La grille du second document

Problème 188
Le triangle équilatéral

À l'intérieur d'un triangle équilatéral ABC, un point P est situé à 3 cm de A, à 4 cm de B et à 5 cm de C. Calculer la longueur du côté AB.

Problème 189
Les différences répétitives de deux carrés

Calculer $8^2 - 3^2$, puis $78^2 - 23^2$, $778^2 - 223^2$ et $7\,778^2 - 2\,223^2$. On obtient successivement 55, 5 555, 555 555 et 55 555 555. On peut continuer ainsi à l'aide d'une calculatrice et de méthodes comme celles qui sont présentées dans *Petites calculatrices, grands nombres* (Bulletin AMQ, mars 1999, p. 18 - 21). Plus simplement, démontrer qu'en général, le carré d'un nombre formé de n–1 chiffres 7 suivis d'un 8, diminué du carré d'un nombre formé de n–1 chiffres 2 suivis d'un 3, donnera toujours un nombre formé de $2n$ chiffres 5.

Pouvez-vous obtenir des nombres formés de $2n$ chiffres 1, ou 2, ou 3, ... comme différences de deux carrés de nombres de la forme *aa...ab* ? De combien de façons ?

Deuxième partie
Solution d'un problème déjà posé

Problème 179
Différence de cubes positifs
(*Bulletin AMQ*, Vol. XXXIX, no 1, mars 1999)

Trouver toutes les façons d'exprimer le nombre 3 367 comme différence de deux cubes positifs.

Nous avons reçu des solutions à ce problème de la part de Nathalie Prévost, une étudiante à la maîtrise à l'UQÀM, de Maurice Brisebois, d'Alexis Gagné-

Lebrun, étudiant en Sciences, Lettres et Arts au Collège de Sherbrooke, et de Charles-Édouard Jean. Ce dernier a fait remarquer que Martin Gardner, dans *Mathematical Carnival*, signale une curieuse propriété du nombre 3 367 : le produit de 3 367 par *ab* est égal à *ababab* divisé par 3. Par exemple, 3 367 × 25 = 252525/3.

On cherche les solutions en entiers positifs de l'équation

$$x^3 - y^3 = 3\,367.$$

On note que

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)\,.$$

Comme x et y sont positifs, on a

$$(1) \qquad x - y < x^2 + xy + y^2\,.$$

On note aussi que 3 367 = 7 × 13 × 37, de sorte que 3 367 a huit diviseurs : 1, 7, 13, 37, 91, 259, 481 et 3 367. Tenant compte de (1), nous avons à considérer les quatre cas indiqués dans le tableau ci-dessous.

Cas	$a = x - y$	$b = x^2 + xy + y^2$
1	1	3 367
2	7	481
3	13	259
4	37	91

Posons

$$a = x - y$$

et

$$(2) \qquad b = x^2 + xy + y^2\,.$$

Alors

$$(3) \qquad y = x - a\,.$$

Par substitution dans (2), on obtient

$$x^2 + x(x - a) + (x - a)^2 = b$$

ou

$$(4) \qquad x^2 - ax + (a^2 - b)/3 = 0\,.$$

Les solutions de (4) sont

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4\,\dfrac{a^2 - b}{3}}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{\dfrac{4b - a^2}{3}}}{2}\,.$$

Dans le cas 1, on a $a = 1$ et $b = 3\,367$ et on obtient $x = 34$ et $y = 33$. Le cas 2 donne $x = 16$ et $y = 9$. Le cas 3 donne $x = 15$ et $y = 2$. Dans le cas 4, le discriminant est négatif.

Problème 182
L'alphamétique d'un naufrage
(*Bulletin AMQ*, Vol. XXXIX, no 1, mars 1999)

Résoudre l'alphamétique suivant, inventé par Matthieu Dufour :

$$\begin{array}{r} \text{I C E B E R G} \\ \times\ 6 \\ \hline \text{T I T A N I C} \end{array}$$

Nous avons reçu des solutions de cet alphamétique de Yohann Wagner et d'Albert Jr. Remarais, deux étudiants de première année du programme de formation des futurs maîtres du secondaire de l'Université de Montréal, d'Alexis Gagné-Lebrun et de Nathalie Prévost, dont j'ai parlé plus haut, et de Maurice Brisebois.

Pour faciliter la discussion, numérotons les colonnes de droite à gauche, la colonne 1 étant celle de *G* et la colonne 7 celle de *I*.

Comme *ICEBERG* et *TITANIC* ont le même nombre de lettres, on doit avoir $I = 1$.

suite à la page 49 ➲

Jeux et problèmes (suite) :

Étant le dernier chiffre de $6 \times G$, C est pair. Si $C = 8$, alors la retenue de la colonne 7 est au moins 4, chose impossible. Si $C = 6$, alors $G = 1 = T$, ou $G = 6 = C$, deux choses impossibles. Si $C = 4$, 24 plus la retenue de la colonne 6 doit se terminer par 1, de sorte que la retenue est 7, chose impossible. Si $C = 2$, le reste de la colonne 6 est 9, chose impossible. Donc C = 0, de sorte que $G = 5$ et $T = 6$. La retenue de la colonne 6 est 1, de sorte que $E = 2$ et la retenue de la colonne 5 est 4.

Comme la retenue de la colonne 2 est 3 et $I = 1$, les deux seules valeurs possibles de R sont 3 et 8. Si $R = 8$, la retenue de la colonne 3 est 5, de sorte que $N = 7$ et la retenue de la colonne 4 est 1. Nous savons déjà que la retenue de la colonne 5 est 4. Ainsi B est 7 ou 8, des valeurs déjà attribuées à R et à N. Donc $R = 3$, la retenue de la colonne 3 est 2 et $N = 4$. Ainsi la retenue de la colonne 4 est 1. De nouveau, B est 7 ou 8. Si $B = 7$, alors $A = 3 = R$. Si $B = 8$, alors $A = 9$ et nous avons trouvé l'unique solution : *ICEBERG* est 1 028 235 et *TITANIC* est 6 169 410. ■

Veuillez adresser toute correspondance à :

Jean M. Turgeon (Mathématiques)
Université de Montréal
C.P. 6128, succursale Centre-ville
Montréal (Québec) H3C 3J7

Téléphone : (514) 343 -7178
Courriel : turgeon@dms.umontreal.ca

■■■