Adieu, horloge grand-père !

Jacques Labelle
UQÀM

Bercé par le doux tic-tac d'une horloge grand-père, je méditais l'autre soir. Voici le fruit de mes pensées jusqu'au moment où je me suis endormi...

Pourquoi le cadran de l'horloge est-il subdivisé en douze ? Pourquoi d'ailleurs 24 heures dans une journée ? De 0 à 12 a.m. puis de 0 à 12 p.m., ou de façon plus moderne de 0 à 24 heures.

Pourquoi avoir divisé l'heure en 60 minutes, puis la minute en 60 secondes ? La réponse à ces questions remonte probablement à la nuit des temps, lorsque les Babyloniens comptaient en base 60. De même que l'idée bizarre d'avoir séparé, pour la mesure des angles, le cercle (un tour complet) en 360 degrés de 60 secondes chacun. De plus sur le cadran de l'horloge, lorsque les nombres de 1 à 12 sont écrits en chiffres romains, pourquoi le quatre s'écrit-il souvent IIII au lieu de IV ? Je me rappelais aussi avoir enseigné à lire l'heure à mes enfants. Pas si facile d'expliquer que lorsque la grande aiguille, celle des minutes, pointe, par exemple, sur le 4, elle indique 20 minutes ; lorsque la petite aiguille, celle des heures, pointe entre 3 et 4, elle indique 3 heures. De plus, les quatre petits traits entre 3 et 4, par exemple, représentent 16, 17, 18 et 19 minutes. Plus on y pense, plus la mesure du temps par une horloge à aiguilles, ou même une horloge ou montre digitale, est remplie d'arbitraires et d'étranges conventions. Il nous faudrait nettement un *système métrique* avec, par exemple, une journée de 10 heures, chacune de 100 minutes, chacune de 100 secondes... mais ce n'est pas pour ce millénaire.

Avant la disparition de la dernière horloge ou montre à aiguilles, avant qu'on ne puisse plus jamais dire dans nos cours de mathématiques « le sens contraire des aiguilles d'une montre », je vous propose quatre problèmes d'aiguilles d'horloges.

Considérons une horloge à deux aiguilles ; l'aiguille G, la grande, l'aiguille des minutes, et l'aiguille P, la petite, l'aiguille des heures.

Problème 1 : À quels moments de la journée G et P sont-elles exactement superposées ?

Problème 2 : À quels moments de la journée G et P sont-elles exactement alignées bout à bout ?

Problème 3 : À quels moments de la journée G et P forment-elles un angle droit ?

Les aiguilles G et P sont superposées à midi, mais ensuite ce n'est pas à une heure cinq mais un petit peu plus tard qu'elles le sont à nouveau.

Afin de résoudre ces trois problèmes, et un quatrième qui viendra ensuite, mathématisons un peu mieux l'horloge. Soit g dans l'intervalle $[0, 12]$ la position de la grande aiguille et $p \in [0, 12]$ celle de la petite aiguille. Le couple (p, g) correspond à l'heure suivante : $[p]$ heures et $5g$ minutes. Ici $[p]$ est la partie entière de p. Par exemple, si p est entre 3 et 4, on lit 3 heures. Le nombre des minutes est $5g$ car un tour complet, de 0 à 12, de la grande aiguille correspond à 60 minutes.

Il reste aussi à réaliser que la grande aiguille va douze fois plus vite que la petite. Lorsque G va de 0 à 12, P avance d'une unité, ou d'un cran, seulement.

Le couple $(p, g) \in [0, 12) \times [0, 12)$ correspond à une heure du jour précisément si

$$p - g/12 \in \{0, 1, 2, 3, ..., 11\}.$$

En effet p dépasse l'entier $[p] = i$ de $g/12$ et il est i heures et $5g$ minutes.

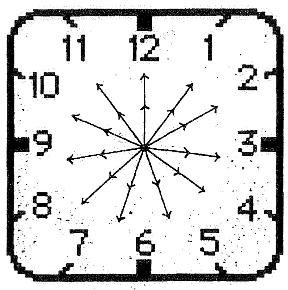
Solution au problème 1

On cherche les couples $(x, x) = (p, g)$ tels que

$$12k + x = 12x, \text{ ou } x = 12k/11 \text{ , où } k = 0, 1, 2, ..., 11.$$

On trouve x, puis l'heure est $[x]$ heures et $5x$ minutes. On obtient douze solutions différentes pour la première partie de la journée :

0 heure 0 minute, i.e. minuit,
1 heure 5 minutes 5/11,
2 heures 10 minutes 10/11,
3 heures 16 minutes 4/11,
4 heures 21 minutes 9/11,
5 heures 27 minutes 3/11,
6 heures 32 minutes 8/11,
7 heures 38 minutes 2/11,
8 heures 43 minutes 7/11,
9 heures 49 minutes 1/11,
10 heures 54 minutes 6/11,
12 heures 0 minute (midi).



On compte onze autres solutions différentes dans la deuxième partie du jour. Il y a donc vingt-trois moments dans une journée où les deux aiguilles de l'horloge sont exactement superposées.

Solution au problème 2

Premier cas. Cherchons d'abord les solutions des six premières heures du jour, où P pointe sur $p \in [0, 6]$. On trouve $g - p = 6$, car pour être aligné, G doit pointer 6 crans plus loin que P. Aussi,

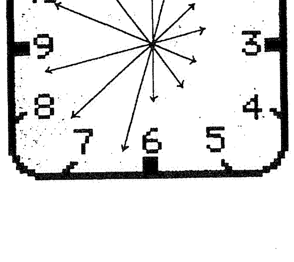
$$p = i + g/12, \text{ où } i = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

On obtient les équations

$$g = i + g/12 + 6, \text{ ou } 11g/12 = 6, 7, 8, 9, 10, 11.$$

On trouve ensuite les valeurs de g, de $p = g - 6$ et de $[p]$; on trouve enfin les heures : $[p]$ heures et $5g$ minutes. On obtient six solutions différentes :

0 heure 32 minutes 8/11,
1 heure 38 minutes 2/11,
2 heures 43 minutes 7/11,
3 heures 49 minutes 1/11,
4 heures 54 minutes 6/11,
6 heures 0 minute.

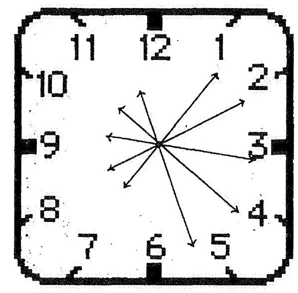


Second cas. Cherchons les solutions où P pointe sur $p \in [6, 12]$. Cette fois, c'est P qui a 6 crans d'avance sur G :

$$p - g = 6, p = i + g/12, \text{ pour } i = 6, 7, 8, 9, 10, 11.$$

On trouve $11g/12 = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. On obtient cinq nouvelles solutions différentes :

7 heures 5 minutes 5/11,
8 heures 10 minutes 10/11,
9 heures 16 minutes 4/11,
10 heures 21 minutes 9/11,
11 heures 27 minutes 3/11.



Il y a donc chaque jour vingt-deux moments où les deux aiguilles de l'horloge sont alignées.

Solution au problème 3

Premier cas. La grande aiguille, G, a 3 crans d'avance sur la petite, P. Les équations sont

$$g - p = 3, p = i + g/12, \text{ où } i = 0, 1, 2, ..., 8.$$

Mais lorsque i devient 9, 10 et 11 il faut prendre

$$g + 12 - p = 3, p = i + g/12.$$

Les équations sont donc

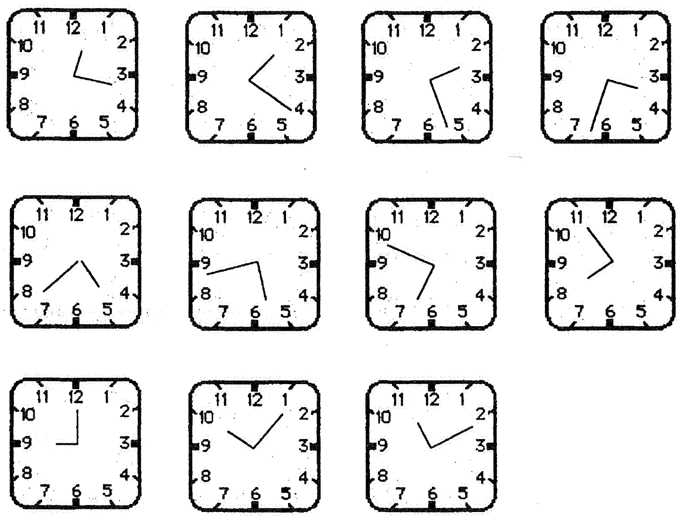
$$11g/12 = 3 + i \text{ pour } i = 0, ..., 8$$

et

$$11g/12 = i \text{ pour } i = 0, 1, 2.$$

On trouve donc g, puis l'heure est $[p] = [i + g/12]$ heures et $5g$ minutes. On obtient donc onze solutions différentes :

0 heure 16 minutes 4/11,
1 heure 21 minutes 9/11,
2 heures 27 minutes 3/11,
3 heures 32 minutes 8/11,
4 heures 38 minutes 2/11,
5 heures 43 minutes 7/11,
6 heures 49 minutes 1/11,
7 heures 54 minutes 6/11,
9 heures 0 minute,
10 heures 5 minutes 5/11,
11 heures 10 minutes 10/11.

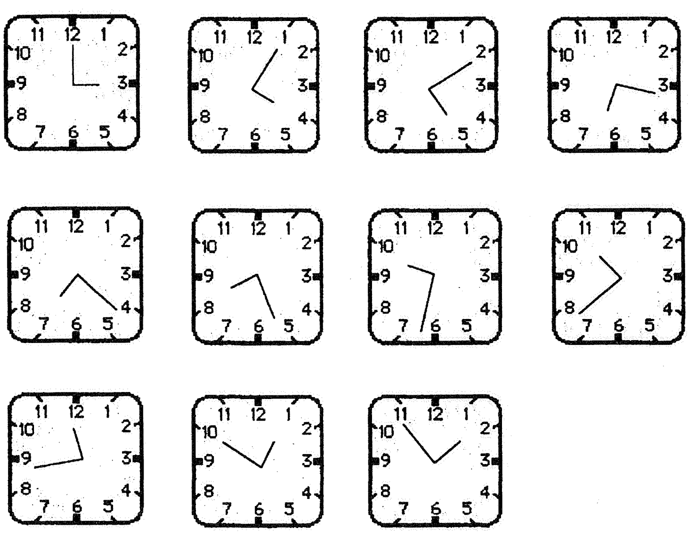


Deuxième cas. La petite aiguille, P, a 3 crans d'avance sur la grande, G:

$$3 + i + g/12 = 3 + g, \text{ où } i = 0, 1, ..., 8.$$

On trouve $11g/12 = i$, et onze autres solutions.

3 heures 0 minute,
4 heures 5 minutes 5/11,
5 heures 10 minutes 10/11,
6 heures 16 minutes 4/11,
7 heures 21 minutes 9/11,
8 heures 27 minutes 3/11,
9 heures 32 minutes 8/11,
10 heures 38 minutes 2/11,
11 heures 43 minutes 7/11,
0 heure 49 minutes 1/11,
1 heure 54 minutes 6/11,
2 heures 60 minutes, i.e. 3 heures.



Dans les 24 heures d'une journée, il y a donc 44 moments où les deux aiguilles d'une horloge forment un angle droit.

Problème 4. Si les deux aiguilles d'une horloge sont identiques, combien de fois par jour l'indication de l'heure sera-t-elle ambiguë ? En d'autres mots, en dehors des 23 fois où les aiguilles sont superposées, combien de fois par jour le fait de permuter les deux aiguilles transforme-t-il une heure acceptable en une autre heure acceptable ?

Solution au problème 4

Il s'agit de trouver les couples (p, g) avec

$$p - g/12 = i \in \{0, 1, 2, ..., 11\}$$

tels que le couple (p, g) est aussi tel que

$$g - p/12 = j \in \{0, 1, ..., 11\}.$$

On en tire

$$p-g+(p-g)/12 = i-j \in \{-11, -10, ..., 0, 1, ..., 11\},$$

puis

$$p - g = 12(i - j)/12 \text{ et } p = g + 12(i - j)/12.$$

On trouve donc

$$p = 144i/143 + 12j/143 = 12(12i/13 + j/13)/11$$

et

$$p = 12i/143 \quad 144j/143 = 12(i/13 + 12j/13)/11$$

où $i, j \in \{0, 1, 2, ..., 11\}$.

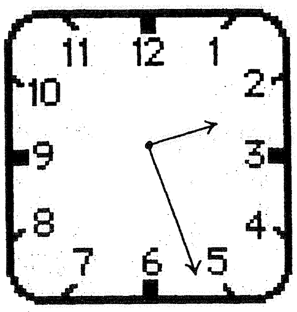
Le cas $i = j$ redonne les 11 solutions entre 0 et 12 heures du problème 1 où les aiguilles sont superposées.

Prenons comme exemple le cas $i = 2, j = 5$. Alors

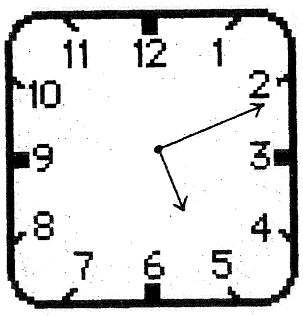
$$p = 349/143, [p] = 2 \text{ heures}$$

et

$$g = 744/143 = 5 + 29/143, 5g = 26 + 2/143.$$



2 heures 26 minutes 2/143



5 heures 12 minutes 12/143

Lorsqu'il est 2 heures 26 minutes et 2/143, et que l'on intervertit les deux aiguilles, on obtient 5 heures 12 minutes et 12/143.

Au total, 23 fois chaque jour les aiguilles de l'horloge sont superposées, comme dans le problème 1, et 264 fois l'heure est ambiguë, comme dans la dernière figure.

Nous laissons au lecteur le soin de se poser d'autres problèmes, par exemple en ajoutant l'aiguille des secondes ! ■

Les problèmes d'horloges entrent dans la grande catégorie des problèmes de corps en mouvement à des vitesses différentes. Le lecteur intéressé trouvera plusieurs problèmes de vitesse et d'horloges dans *Défis mathématiques pour les jeunes de 15 à 95 ans et leurs parents*, publié par l'*Association mathématique du Québec* (Éditions *Le Griffon d'argile*, 7649, boulevard Wilfrid Hamel, Sainte-Foy (Québec) G2G 1C3 ; tel. : 1-800-268-6898 ; prix : 20,00 $). Ce recueil contient 339 problèmes posés entre 1959 et 1998 au *Concours de l'Association mathématique du Québec*, section Secondaire 4 et 5.

SOUSCRIPTION À LA CAMPAGNE DE FINANCEMENT DES CAMPS MATHÉMATIQUES

Oui! Je désire contribuer au financement des camps mathématiques.

❑ 20 $	❑ 30 $	❑ 50 $	❑ 100 $	______ AUTRES

❑ PAR CHÈQUE À L'ORDRE DE L'AMQ

❑ VISA ❑ MASTER CARD Date d'expiration :____________

NO. DE LA CARTE :______________________________

SIGNATURE :______________________________

Nom : ______________________

Adresse : ______________________

____

Code postal : ______________________

Pour 20 $ ou plus, ou sur demande, vous recevrez un reçu pour fin d'impôt.
NE : 12 577 5858 RR 0001

❑ Je désire recevoir un reçu pour fin d'impôt

7 400, boul. Saint-Laurent, bureau 257, Montréal (Québec) H2R 2Y1 - Tél.: 278-4263