Jeux et problèmes

Jean M. Turgeon

Première partie
Nouveaux jeux et problèmes

Problème 183
Le jeu des pions

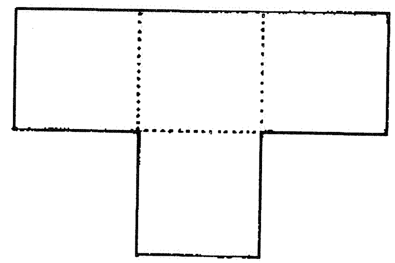
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Le jeu des pions se joue à deux joueurs, que nous appellerons Bernard et Gaston. Ils disposent d'une bande de quinze carrés, numérotés de 1 à 15, et de quinze pions dans une boîte. Au départ, aucun pion n'est posé sur la bande. Berbard et Gaston jouent à tour de rôle. Bernard commence. À chaque coup, il peut prendre au plus six pions dans la boîte et les disposer sur les cases libres de son choix. Puis c'est le tour de Gaston, qui peut enlever de la bande un nombre quelconque de pions, à la condition qu'ils soient sur des cases consécutives. Gaston doit enlever au moins un pion, et il remet dans la boîte les pions qu'il a enlevés. Est-il possible, pour Bernard, de poser tous les pions sur la bande, quel que soit le jeu de Gaston ? Si oui, quel est le nombre minimum de coups par lesquels il peut y arriver ?

Ce problème a été posé le 15 mai 1999, à la *Finale du Québec* du *Concours des jeux mathématiques et logiques.* Ce concours était organisé par Frédéric Gourdeau, qui a fourni aussi les trois problèmes suivants.

Problème 184
Recouvrir un échiquier de tétraminos

Peut-on recouvrir exactement les cent cases d'un échiquier 10 × 10 à l'aide de tétraminos en forme de T, comme celui qui est illustré ci-dessous, et qui recouvre quatre cases de l'échiquier ?



Problème 185
Les points dans un disque

Quel est le plus grand nombre de points que l'on peut placer strictement à l'intérieur d'un disque de rayon 1, si la distance minimale séparant deux de ces points doit être plus grande ou égale à 1 ?

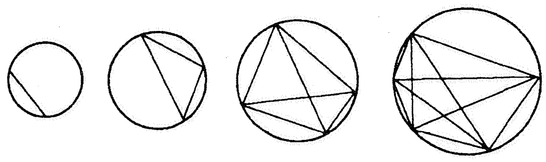
Problème 186
Les sommes des chiffres

On remplace un nombre écrit en base 10 par la somme de ses chiffres. On répète ce procédé à la somme obtenue jusqu'à ce qu'on arrive à un nombre à un seul chiffre. Par exemple, partant de 9 283, on passe à 22, puis à 4. Si on applique cette opération à tous les nombres n tels que $10^6 \leq n \leq 10^7$, combien de fois le résultat final sera-t-il le nombre 1 ?

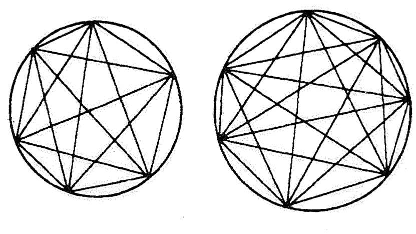
Deuxième partie
Solutions de problèmes déjà posés

Problème 174
Cordes au cou dans un cercle
(Bulletin AMQ, Vol. XXXVIII, no 3, oct. 1998)

On considère les six figures ci-dessous. Il s'agit de polygones inscrits dans des cercles. Ces polygones ne sont pas réguliers, de sorte qu'aucune corde ne passe par un point d'intersection de deux autres cordes à l'intérieur du cercle. Le problème consiste à compter le nombre des régions déterminées par les cordes, en fonction du nombre n des sommets.



2 points 2 régions | 3 points 4 régions | 4 points 8 régions | 5 points 16 régions

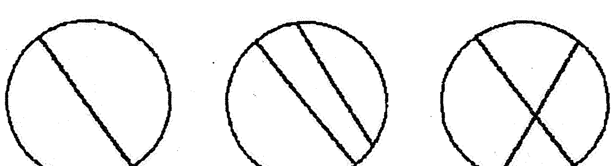


6 points 31 régions | 7 points 57 régions

Nous avons déjà publié, dans le numéro de décembre 1998, p. 44, la solution proposée par Charles-Édouard Jean. Cette solution était basée sur un calcul algébrique à partir des valeurs obtenues pour n = 2, 3, ... 7, sans considérer l'aspect géométrique du problème. Dans le numéro de mars 1999, p. 35, on trouvait une solution géométrique, inspirée d'un raisonnement de Yaglom et Yaglom et présentée par Maurice Brisebois. Le lecteur qui a suivi ces développements sera sans doute intéressé par la solution suivante, d'une élégance surprenante, que m'a signalée Frédéric Gourdeau. C'est celle que donne Ross Honsberger dans son livre *Mathematical Morsels* (Dolciani Mathematical Expositions No. 3, M.A.A., 1978, p. 4).

Avec n sommets sur le cercle, le nombre des cordes est

$$C=\binom{n}{2}.$$

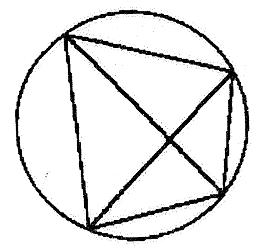


On commence par un cercle sans cordes et on suppose que les cordes sont ajoutées une à la fois. La première corde divise le cercle en deux régions. Avec l'ajout de la deuxième corde, le nombre des régions passe à 3 ou à 4, selon que cette deuxième corde intersecte ou n'intersecte pas la première. En général, pour $i = 1, 2, ..., C$, si la i-ème corde a p_i points d'intersection avec des cordes déjà présentes, alors elle traverse p_i+1 régions déjà définies.

Ainsi le nombre des régions définies par C cordes est

$$1 + (p_1+1) + (p_2+1) + ... + (p_C+1) = 1 + P + C,$$

$$\text{où } P = \sum_{i=1}^{C} p_i$$



est le nombre des points d'intersections de cordes à l'intérieur du cercle. Or on a aussi

$$P=\binom{n}{4},$$

puisqu'il y a exactement un point d'intersection pour chaque ensemble de quatre sommets. Le nombre total de régions est donc donné par la formule

$$1+\binom{n}{4}+\binom{n}{2}.$$

En évaluant cette expression sous la forme d'un polynôme, on retrouve bien la solution proposée par Édouard-Charles Jean dans le numéro de décembre 1998 du *Bulletin AMQ*.

Problème 177
Une indigestion de cure-dents
(*Bulletin AMQ, Vol. XXXVIII, n^o 4, déc. 1998*)

Une boîte contient c cure-dents. Vous en ajoutez trois puis vous en retranchez deux et ainsi de suite, toujours en respectant cet ordre et la nature des mouvements. Par exemple, après la première opération, il y aura (c + 3) cure-dents dans la boîte ; après la deuxième, (c + 1), après la troisième (c + 4), après la quatrième, c + 2). Combien y aura-t-il de cure-dents dans la boîte après la n^e opération ?

Nous avons reçu des solutions de ce problème de la part de Jacques Sormany, de Chicoutimi, de Frédéric Gourdeau et du proposeur, Charles Édouard Jean.

La réponse est $c + n/2$ si n est pair, $c + (n+5)/2$ si n est impair. Jacques Sormany fait remarquer que ces deux expressions peuvent être fusionnées en une seule, inélégante mais correcte :

$$c+\frac{2n+5(-1)^{n-1}+5}{4}.$$

Problème 178
Quels résultats !
(Bulletin AMQ, Vol. XXXVIII, n° 4, déc. 1998)

L'analyse des résultats d'un examen de mathématiques donné à soixante élèves révèle que la moyenne est de 60 %. Le maximum est de 100 points et toutes les notes sont en valeurs entières. De plus, aucun élève n'a obtenu la même note qu'un autre. Combien d'élèves au maximum ont obtenu un résultat 60 % et plus ?

Nous avons reçu des solutions de ce problème de la part de Jacques Sormany, de Frédéric Gourdeau, de Maurice Brisebois et du proposeur, Charles Édouard Jean. Voici la solution de Maurice Brisebois.

Le nombre maximum d'étudiants pouvant obtenir 60 % et plus est au plus égal à quarante-et-un ; en effet, il y a quarante-et-une notes différentes possibles entre la note 60 et la note 100 (bornes incluses) et on suppose par hypothèse que toutes les notes doivent être différentes. Je vais montrer qu'il existe au moins une solution pour laquelle cette borne est effectivement atteinte.

Si ce nombre maximum est supposé égal à quarante-et-un, alors la somme des notes obtenues par ces étudiants est égale à 60 + ... + 100, qui vaut 3280. Comme la moyenne du groupe entier est égale à 60 %, la somme des notes obtenues par les dix-neuf autres étudiants du groupe est égale à 320. Le problème sera résolu si je montre que l'équation diophantienne $x_1 + ... + x_{19} = 320$ admet au moins une solution dans les entiers non négatifs où x_i est la note obtenue par l'étudiant i, pour $i = 1, ..., 19$, et où x_i est compris entre 0 et 59 (les bornes pouvant être effectivement atteintes) et où l'on suppose que les x_i sont tous différents.

Je vais utiliser une approche constructive afin de résoudre ce problème. Je vais supposer que les dix-neuf étudiants mentionnés ci-haut obtiennent des notes formant une progression arithmétique de raison 1 et de terme initial a. Alors la somme de leurs notes sera $a + (a + 1) + ... + (a + 18)$ qui vaut $19 (a + 9)$. On va chercher une valeur de a telle que $19 (a + 9)$ soit la plus rapprochée possible de l'entier 320 ; en posant $a = 8$, on obtient $19 (8 + 9) = 323$. Il reste alors à modifier de façon appropriée au moins un terme de cette progression arithmétique, afin que la somme des notes ainsi modifiées soit exactement égale à 320. En remplaçant, par exemple, la note 8 par la note 5, on obtient la solution admissible suivante : 5, 9, 10, ..., 26, 60, ..., 100. Le problème est ainsi résolu.

On peut construire une autre solution en supposant d'abord que les notes de dix étudiants parmi les dix-neuf en question sont les entiers 1, ..., 10. La somme des notes des neuf étudiants restants est alors égale à 265 et on a à résoudre l'équation $x_1 + ... + x_9 = 265$, en supposant les mêmes restrictions que précédemment sur les x_i. En posant alors $x_1 = 26, ... , x_9 = 34$, on obtient 270 comme total des notes de ces étudiants ; il suffit enfin de prendre $x_1 = 21$ en gardant les autres valeurs inchangées et la solution obtenue est donc : 1, ..., 10, 21, 27, ..., 34, 60, ..., 100.

Je ne peux présenter une solution théorique satisfaisante de ce problème mais je tiens à informer les lecteurs de quelques résultats qui pourraient être utiles à cette fin et qui sont disponibles dans deux ouvrages auxquels je m'abreuve souvent.

(1) On peut montrer que l'équation diophantienne $a_1x_1 + \ldots + a_kx_k = n$ possède une solution dans les entiers si et seulement si $d = pgcd\ (a_1, ..., a_k)$ divise n. (B. M. Stewart (1964), *Theory of Numbers*, Macmillan, p. 102). Dans le cas qui nous intéresse, tous les a_i sont égaux à 1 et ainsi on est assuré que l'équation possède au moins une solution. Mais on ne peut affirmer qu'il existe des solutions entières positives ou entières non-négatives (avec, dans ce dernier cas, une seule composante nulle).

(2) Le nombre de solutions distinctes entières et non négatives de l'inégalité $x_1 + ... + X_n \leq n$ est égal à $C(n + r, n)$. (Sheldon M. Ross (1988), *Initiation aux probabilités*, traduction de la 3[e] édition américaine, Lausanne, Presses polytechniques et universitaires romandes, p. 16-17). On peut donc en déduire que le nombre de telles solutions de l'égalité $x_1 + ... + x_r = n$ est donné par $C(n + r, n) - C(n + r - 1, n)$, soit $C(n + r - l, n - l)$ *ou encore* $C(n{+}r{-}1, r)$. Mais ce résultat ne vaut que s'il n'y a pas de restrictions sur le domaine de variation des variables en jeu, ce qui n'est pas notre cas puisque tous les x_i doivent être inférieurs ou égaux à 59. Comme le nombre de solutions entières non négatives est énorme, le nombre de solutions avec la restriction indiquée ci-haut est, j'imagine, lui aussi énorme. ■

Veuillez adresser toute correspondance à :
Jean M. Turgeon (Mathématiques)
Université de Montréal
C.P. 6128, succursale Centre-ville
Montréal (Québec) H3C 3J7
Téléphone : (514) 343-7178
Courriel : turgeon@dms.umontreal.ca