Petites calculatrices, grands nombres

Jean M. Turgeon

Ayant appris dans l'enfance une certaine façon d'additionner, de soustraire, de multiplier et de diviser, on peut facilement s'imaginer que ces algorithmes font partie de la nature des choses et que l'homme a utilisé ces méthodes depuis des temps immémoriaux. Pourtant le traité de Luca Pacioli, *Summa de arithmetica*, publié il y a seulement cinq cents ans, en 1494, donc à l'époque de la découverte de l'Amérique par Christophe Colomb, ne présentait pas moins de huit méthodes de multiplication. Il s'agissait, à cette époque, de convaincre la population européenne de remplacer les chiffres romains et l'abaque par les chiffres arabes et la nouvelle arithmétique.

Toutes ces méthodes peuvent paraître également périmées avec l'avènement de la calculatrice électronique et des ordinateurs. Mais un jour où j'avais avec moi une calculatrice à huit chiffres, j'ai voulu vérifier la proposition suivante.

Le produit de deux nombres qui se terminent par
81 787 109 376
se termine lui-même par ces mêmes chiffres.

Mon problème était de tirer le meilleur parti de ma calculatrice pour effectuer ce calcul. En d'autres mots, il s'agit de faire de la calculatrice non plus une ennemie, mais une alliée du calcul à la main. Mais avant de résoudre mon problème de multiplication, commençons par l'addition.

L'addition

Vous avez une calculatrice à huit chiffres et je vous demande d'effectuer l'addition suivante.

$$\begin{array}{rr} & 7\,974\,294\,923\,090\,514\,748\,410\,896 \\ + & 9\,143\,579\,754\,169\,201\,794\,817\,927 \end{array}$$

Pour tirer le meilleur parti de la calculatrice, on y entrera le plus grand nombre possible de chiffres à la fois. La somme de deux nombres à n chiffres est soit un nombre à n chiffres, soit un nombre à n+1 chiffres. Pour que la somme ne dépasse pas la capacité de la calculatrice, on procédera par blocs de sept chiffres à la fois. On exprimera donc les nombres donnés en base 10^7, où les « chiffres » vont de 0, 1, 2, ... à 9999999, comme suit.

$$\begin{array}{rr} & 7974\ 2949230\ 9051474\ 8410896 \\ + & 1169\ 2848310\ 7868704\ 6407031 \end{array}$$

Comme dans une addition à la main, on commence par la dernière colonne de droite. La calculatrice donne

$$8410896 + 6407031 = 1\ 4817927.$$

On a donc une retenue de 1 à reporter à la deuxième colonne de droite. Cette fois, la calculatrice donne

$$1 + 9051474 + 7868704 = 1\ 6920179.$$

On continue ainsi et on obtient la somme

$$9143\ 5797541\ 6920179\ 4817927.$$

Soustraction

On pourrait penser que pour la soustraction on puisse procéder par blocs de huit chiffres. Mais ce serait oublier qu'il faut parfois « emprunter chez le voisin », comme dans l'exemple suivant.

$$\begin{array}{rr} & 8691000\ 1560832\ 5615570 \\ - & 3157539\ 1560841\ 7223199 \end{array}$$

Pour fins de calculs, on remplacera donc le premier nombre par l'expression bizarre suivante.

8690999 (1)1560831 (1)5615570.

On peut maintenant utiliser la calculatrice pour effectuer les soustraction, un bloc à la fois, et obtenir la différence

5533460 9999990 8392371.

Multiplication

Au moment d'aborder la multiplication, nous devons de nouveau nous demander dans quelle base travailler pour tirer le meilleur parti de la calculatrice.

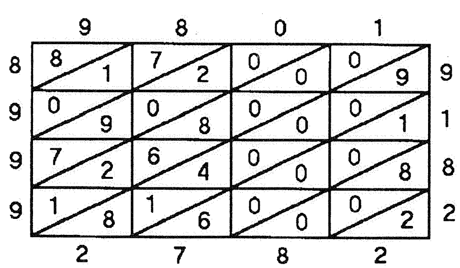
Le produit de deux nombres à n chiffres est soit un nombre à $2n$ chiffres, soit un nombre à $2n - 1$ chiffres. Comme nos produits ne doivent pas dépasser huit chiffres, on aura $n = 4$.

Dans les calculs à l'aide de la méthode que nous avons tous apprise à l'école, et qui remonte à Pacioli, on retient de mémoire les reports de dizaines. C'est un inconvénient quand on travaille en base 10^4, c'est-à-dire avec des « chiffres » qui varient de 0 à 9999. Voyons deux façons de contourner cette difficulté : *gelosia* et le procédé *Z*.

Gelosia

Dans la méthode que Pacioli appelait *gelosia*, « on dispose les nombres autour d'un quadrilatère divisé en carrés où s'inscrivent les totaux partiels de part et d'autre des diagonales de ces carrés, orientés suivant la position des nombres au départ. L'addition des nombres en diagonale[1] donne le produit, qui s'inscrit élégamment sur les côtés restés libres de la *gelosia*. Ce mot[2] désignait le treillis de bois ou de fer qui, comme le moucharebiah arabe, permet de voir de l'intérieur d'une maison sans être vu et protège la pudeur des femmes » (Allard, 1995, p. 748).

Voici, pour illustrer la méthode, le produit $9\,801 \times 9\,182$.



La réponse est

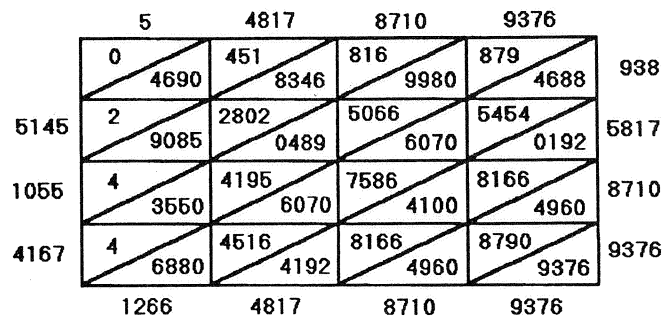
89 992 782.

Appliquons la méthode *gelosia* au produit de deux nombres qui se terminent par

(1) 81 787 109 376,

et que nous écrirons en base 10^4, disons

$$5\ 4817\ 8710\ 9376 \times 938\ 5817\ 8710\ 9376.$$



La réponse est donc

5145 1055 4167 1266 4817 8710 9376

et se termine bien par

81 787 109 376.

Produits de polynômes

Un article récent de Jeff Suzuki (1999, p. 51) applique la méthode *gelosia* au produit de polynômes. Voici par exemple la multiplication de

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 5$$

par

$$x^2 - 2x - 3.$$

On obtient le produit

	x^3	$-2x^2$	$3x$	-5	
	x^5	$-2x^4$	$3x^3$	$-5x^2$	x^2
x^5	$-2x^4$	$4x^3$	$-6x^2$	$10x$	$-2x$
$-4x^4$	$-3x^3$	$6x^2$	$-9x$	15	-3
	$4x^3$	$-5x^2$	x	15	

$$x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 5x^2 + x + 15.$$

Multiplier les polynômes de cette façon présente plusieurs avantages. Premièrement, les méthodes de calcul habituelles sont entièrement différentes, selon que l'on multiplie deux entiers ou deux polynômes. Ici, on emploie la même méthode dans les deux cas. Deuxièmement, les calculs sont faciles à vérifier. Troisièmement, quand on a pris l'habitude de calculer les produits de polynômes de cette façon, on peut se dispenser d'écrire toutes les puissances de x : il suffit d'inscrire les coefficients dans les cases appropriées et d'effectuer les sommes le long des diagonales.

Le quatrième avantage me semble le plus important. C'est d'obtenir un algorithme de division où il apparaît clairement que cette opération est l'inverse de la multiplication.

Pour donner un exemple, divisons

$$x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 5x^2 + x + 15$$

par

$$x^2 - 2x - 3.$$

On inscrit d'abord les deux polynômes autour de la grille, comme dans la figure ci-dessous.

					x^2
x^5					$-2x$
$-4x^4$					-3
	$4x^3$	$-5x^2$	x	15	

Il est clair que le contenu de la case de la première ligne et première colonne de la grille sera x^5. Ainsi il faudra inscrire x^3 au-dessus de la première colonne, ce qui nous permet de compléter la première colonne de la grille.

	x^3				
	x^5				x^2
x^5	$-2x^4$				$-2x$
$-4x^4$	$-3x^3$				-3
	$4x^3$	$-5x^2$	x	15	

On a $-4x^4$ à gauche de la troisième ligne, qui doit être la somme d'une diagonale qui contient déjà $-2x^4$. Le contenu de la deuxième case de la première ligne sera donc aussi $-2x^4$. On aura donc $-2x^2$ au-dessus de la deuxième colonne, que nous pouvons maintenant compléter.

	x^3	$-2x^2$			
	x^5	$-2x^4$			x^2
x^5	$-2x^4$	$4x^3$			$-2x$
$-4x^4$	$-3x^3$	$6x^2$			-3
	$4x^3$	$-5x^2$	x	15	

On procède ainsi pour les deux autres colonnes du tableau. Le résultat final est identique au tableau qui a servi à la multiplication, au point que l'on ne peut savoir s'il a servi à une multiplication ou à une division !

	x^3	$-2x^2$	$3x$	-5	
	x^5	$-2x^4$	$3x^3$	$-5x^2$	x^2
x^5	$-2x^4$	$4x^3$	$-6x^2$	$10x$	$-2x$
$-4x^4$	$-3x^3$	$6x^2$	$-9x$	15	-3
	$4x^3$	$-5x^2$	x	15	

J'ai cherché en vain un algorithme de division d'entiers inspiré de *gelosia* et qui soit nettement l'inverse de l'algorithme de multiplication d'entiers.

Le procédé *Z*

La méthode *gelosia* « ne présente pas que des avantages : dans certains cas, le tracé du tableau demande plus de temps et de minutie que les calculs eux-mêmes » (Chabert et autres, 1994, p. 32). D'après Smith (1925, p. 115) et Suzuki (1999, p. 51), cette méthode est très ancienne et fut longtemps populaire, mais les difficultés de reproduire la grille dans un texte imprimé furent telles qu'on a graduellement cessé d'en parler dans les traités d'arithmétique.

Le procédé que j'appelle *Z*, à cause de la forme que prend le tableau des nombres, diffère de la méthode *gelosia* par l'arrangement des calculs. Pour l'illustrer, revenons au produit

$$5\ 4817\ 8710\ 9376 \times 938\ 5817\ 8710\ 9376.$$

Avec l'aide de la calculatrice, on multiplie les « chiffres » de la première ligne par 9376, le dernier « chiffre » de la deuxième ligne, et on dispose les résultats les uns au-dessous des autres en respectant les positions. On recommence avec 8710, l'avant-dernier « chiffre » de la deuxième ligne, en respectant de nouveau les positions. Une fois tous les produits effectués, on additionne les colonnes. Ce procédé ressemble à l'algorithme habituel, sauf que les retenues sont incluses dans le tableau des calculs.

```
                           5  4817  8710  9376
                     x   938  5817  8710  9376
    ------------------------------------------
                                    8790  9376
                              8166  4960
                        4516  4192
                     4  6880
                              8166  4960
                        7586  4100
                  4195  6070
               4  3550
                        5454  0192
                  5066  6070
            2802  0489
         2  9085
                   879  4688
             816  9980
     451  8346
    4690
    ------------------------------------------
    5145  1055  4167  1266  4817  8710  9376
```

Division

C'est le procédé *Z* qui nous servira pour la division. Comme dans la multiplication, on traitera les chiffres par blocs de quatre. Prenons comme exemple la division de

$$6521\ 0365\ 8214\ 0879\ 9548\ 3084$$

par

$$7153\ 3084\ 9773.$$

Comment deviner que le premier chiffre (en base 10^4) du quotient sera 9116 ? Il suffit de diviser, à l'aide de la calculatrice, le nombre formé des deux premiers chiffres du dividende : 6521 0365, par le nombre 7153,3084 (cette virgule est importante) :

$$6521\ 0365 \div 7153{,}3084 \rightarrow 9116{,}0986$$

On oublie les décimales et on garde 9116. Il arrive que le nombre obtenu par cette méthode soit légèrement trop grand on trop petit, mais c'est toujours une bonne approximation.

```
6521  0365  8214  0879  9548  3084 | 7153  3084  9773
            8909  0668             |------------------
      2811  3744                     9116  1126  1308
6520  6748
--------------------------
       805  5561  0211  9548
                  1100  4398
             347  2584
       805  4278
      ----------------------------
             935  6527  5150  3084
                        1278  3084
                   403  3872
             935  6124
            ----------------------
                                 0
```

Conclusion

Bien des gens considèrent que l'arithmétique est une chose triviale, que les enfants apprennent et que les ordinateurs exécutent mieux que les humains. Il se publie pourtant chaque année de nombreux articles, dans des revues spécialisées, sur la science du calcul numérique, qui fait aussi l'objet de conférences et de colloques internationaux. Il vaut aussi la peine de nous pencher sur ces questions pour notre vie personnelle, afin de mieux comprendre ces processus de pensée dont nous nous servons tous les jours. ■

Notes

1 En partant du coin inférieur droit.

2 *Jalousie* ou *persienne* en français, *celosìa* en espagnol.

Références bibliographiques

Allard, A. (1995). « La révolution arithmétique du Moyen Âge ». *La Recherche*, 278, p. 742-748.

Chabert, J.-L. et autres (1994). *Histoire d'algorithmes.* Paris, Bélin.

Smith, D.E. (1925). *History of Mathematics, Vol. 2.* New York, Dover.

Suzuki, Jeff (1999). « Multiplying and Dividing Polynomials Using Geloxia » *The College Mathematics Journal*, 30, 1, p. 50-53.

Jean M. Turgeon
Mathématiques et statistique
Université de Montréal