Une douzaine de perles mathématiques*

Jacques Labelle

Introduction

De nombreuses personnes n'aiment pas, pour ne pas dire détestent, la mathématique car elles considèrent que c'est une discipline terne et aride. Pour elles, faire des mathématiques c'est additionner ou multiplier des entiers, fractions ou polynômes, ou résoudre des centaines d'équations toutes semblables et mémoriser, sans comprendre, plein de formules. Une activité plutôt terne et aride, en effet !

Le but de cet article est de montrer qu'en mathématiques, imagination, logique, intuition et beauté occupent une place importante. Nous avons assemblé plusieurs problèmes (des perles !) où seule une idée originale et parfois surprenante dévoile la solution.

1) Le patio brisé

a) On veut construire un patio en béton de 8 mètres sur 8 mètres à l'aide de 32 dalles rectangulaires de 1 mètre sur 2 mètres. C'est très facile mais c'est lourd !

b) Peut-on construire un patio dont il manque deux carrés diagonalement opposés d'un mètre carré chacun avec 31 dalles cette fois ? Même si, à priori, il n'y a aucun problème au niveau de l'aire. C'est moins facile. Rendons le problème plus léger en le remplaçant par un problème équivalent.

Peut-on recouvrir un échiquier (8 sur 8) dont il manque deux cases blanches diagonalement opposées (figure 1) avec 31 dominos (les dominos étant exactement de la grandeur de deux cases adjacentes) ?

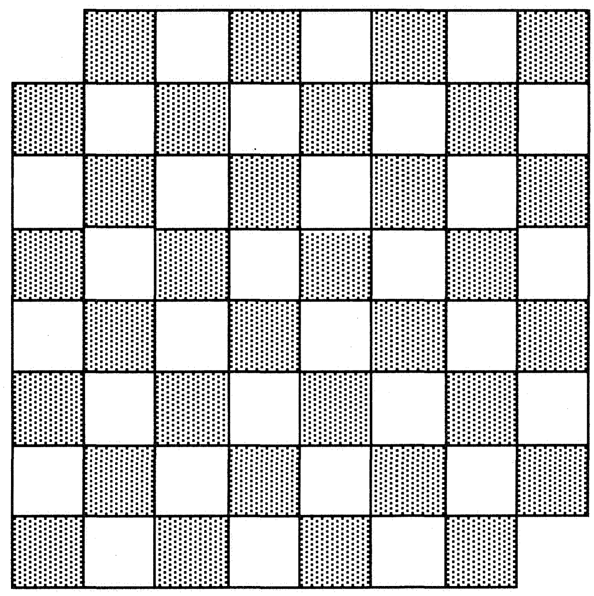

Figure 1

Réponse : Non. Tout domino couvre une case blanche et une case noire et il y a 32 cases noires et 30 cases blanches à couvrir ; au mieux le 31^{e} domino devra couvrir deux cases noires !

c) Et si on enlève plutôt deux cases de couleurs opposées, n'importe où sur l'échiquier, peut-on toujours recouvrir les 62 cases restantes avec 31 dominos ?

Réponse : Oui. Mais comment le démontrer ? Une preuve très astucieuse se résume à la figure 2.

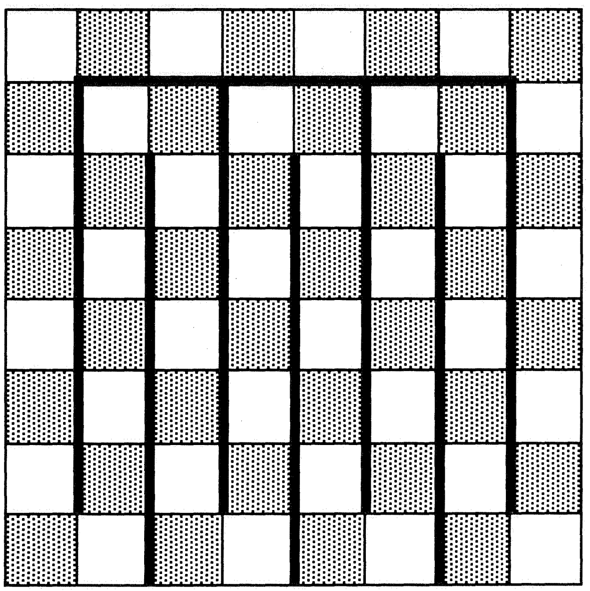

Figure 2

Cette figure décrit un circuit parcourant les 64 cases de l'échiquier. En enlevant une case blanche et une case noire (de n'importe quelle façon !), le circuit est brisé en deux chemins, *tous deux de longueur paire*, (l'un des deux pouvant être vide) qu'il est facile de recouvrir en le parcourant avec des dominos. Le tour est joué !

2) Jouons à saute-mouton

La figure 3 représente 15 moutons qui désirent sauter une clôture vers la liberté. Mais ne vous endormez pas tout de suite car il y a un problème. Les moutons ne peuvent sauter qu'en « sautant à saute-mouton ».

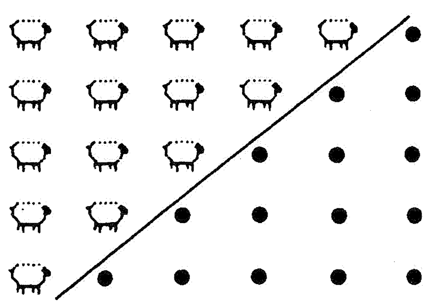

Figure 3

En d'autres mots, les seuls coups légaux de cette énigme sont décrits par la figure 4.

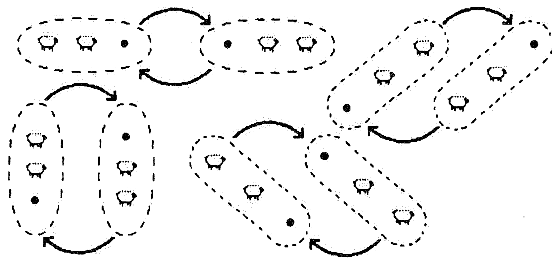

Figure 4

Réponse : On ne peut faire mieux que de faire traverser 12 des 15 moutons. Encore là, une seule figure explique tout.

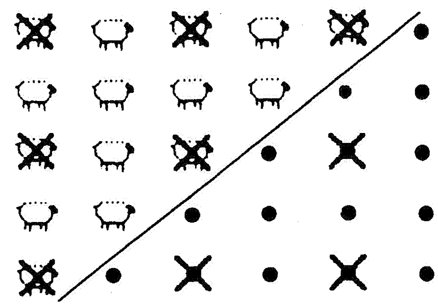

Figure 5

Les 6 moutons marqués d'un X se battent pour trois places ! Le mieux (et c'est facile) que l'on puisse faire est donc de faire traverser 12 des 15 moutons.

3) L'âge des trois fils

Arthur et Victor se rencontrent après s'être perdus de vue depuis leur enfance.

Victor :	« Arthur, as-tu des enfants ? »
Arthur :	« J'ai trois fils. »
Victor :	« Quel âge ont-ils ? »
Arthur :	« Essaie de deviner, tu sais comment j'aimais les énigmes à l'école... Je te donne des indices. »
Victor :	« Ok, j'écoute. »
Arthur :	« Premier indice : le produit de leurs âges est 36. »
Victor :	« Il y a plusieurs possibilités.»
Arthur :	« Deuxième indice : tu vois la bâtisse là-bas, son nombre d'étages est la somme des âges de mes trois fils. »

Victor compte les étages et dit : « Je manque d'indices. »

Arthur : « Troisième indice : mon plus vieux a les yeux bleus. »
Victor : « Merci pour cet indice, maintenant je connais les âges. »

Expliquez la logique du raisonnement de Victor.

Solution : Soient x, y, z les âges avec $0 \leq x \leq y \leq z$. Grâce au premier indice, pour (x, y, z), il y a 8 possibilités : (1, 1, 36), (1, 2, 18), (1, 3, 12), (1, 4, 9), (1, 6, 6), (2, 2, 9), (2, 3, 6), (3, 3, 4). Après le second indice, Victor compte les étages et compare au total $x + y + z$ dans les 8 cas :

Totaux : 38, 21, 16, 14, 13, 13, 11, 10.

La subtilité ici est que le fait de manquer d'indices est en soit un indice ! En effet, s'il compte 38, 21, 16, 14, 11 ou 10 étages, il trouve la réponse. Il y a donc 13 étages à la bâtisse et Victor ne peut trancher entre 1 an, 6 ans et 6 ans, ou, 2 ans, 2 ans et 9 ans. Le troisième indice qui parle d'un plus vieux lui permet de conclure que les trois fils ont : 2 ans, 2 ans et 9 ans (lorsqu'on a deux fils de 6 ans, on ne peut dire « Le plus vieux a les yeux bleus. »).

4) Le paradoxe du garçon d'ascenseur

Ceci est un classique. Trois clients arrivent à l'hôtel. Le patron leur demande 30 \$. Pris de remords, il donne 5 \$ au garçon d'ascenseur à qui il demande d'aller rembourser les trois clients. Le garçon se dit : « 5 \$ à partager en trois... je garde 2 \$ et je remets 1 \$ à chacun ». Ce qu'il fait.

Chacun des trois clients a donc payé 9 \$. Paradoxe ! Neuf fois trois plus le 2\$ du garçon, ça ne fait que 29 \$ et non 30 \$.

Où est passé le dollar perdu ?

Solution : Pourquoi additionner 27 \$ payés à 2 \$ reçus. Il faut dire : « neuf fois trois moins 2 \$ ça fait bien le 30 \$ - 5 \$ = 25 \$ reçus par le patron.

5) Un problème de menuiserie

Souvent dans les quincailleries, on paie le bois d'après le volume mais aussi suivant le nombre de coupes à effectuer. Étant donné un grand cube de bois de 3 mètres sur 3 mètres sur 3 mètres, comment le découper en 27 cubes égaux (d'un mètre cube chacun) avec le moins de coupures possibles ? On peut facilement le faire avec 6 coupures (i.e. deux dans chacune des trois dimensions) ; mais en déplaçant les morceaux pour augmenter la longueur des coupures peut-on faire mieux ? Essayez, vous verrez qu'il y a beaucoup de possibilités ! Il y a peut-être moyen avec seulement 5 coupures après tout.

Réponse : Non. Les 6 faces du cube central demandent forcément 6 coupures !

6) Le tapis magique

Considérons un tapis carré de 21 mètres sur 21 mètres.

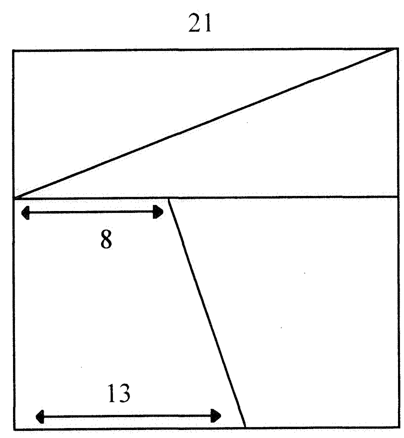

Figure 6

Comme à la figure 6, coupons-le en 4 morceaux et recollons-le (figure 7) pour faire un tapis rectangulaire de 13 mètres sur 34 mètres.

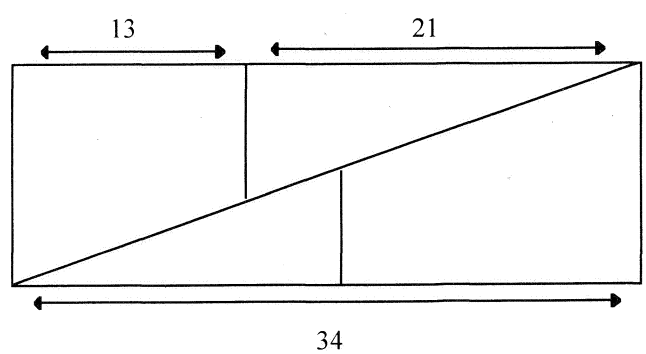

Figure 7

Le problème est que $13 \cdot 34 = 442$ et $21 \cdot 21 = 441$, on a donc créé un mètre carré de tapis !

Explication : La bonne figure pour le tapis rectangulaire est la suivante :

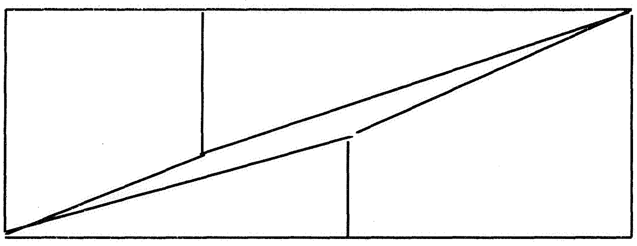

Figure 8

Il y a un trou en forme de parallélogramme très mince au milieu du tapis !

7) Un jeu difficile

Considérons le jeu suivant entre deux joueurs A et B. A commence et choisit un des entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ou 9. Puis c'est B qui choisit un de ceux qui restent, et ainsi de suite en alternant. Le gagnant est le joueur qui peut le premier obtenir un total de 15 avec trois des nombres qu'il a choisis. Qui gagne ? Et comment doit-il jouer ?

Solution : Regardez le carré magique suivant :

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Figure 9

Trois cases en ligne (horizontale, verticale ou diagonale) ont toujours un total de 15 et réciproquement trois cases de total 15 sont forcément en ligne. Jouer au jeu difficile pour celui qui voit le carré magique revient à jouer au tic-tac-toe ! Il fait des ronds pour les choix de A et des X pour ceux de B.

8) L'araignée rapide

Une araignée se trouve à 3 mètres du sol au milieu du mur de 3 mètres de largeur et 4 mètres de hauteur dans une pièce de 3 mètres par 4 mètres par 5 mètres de longueur. Elle veut se rendre à un mètre du sol au milieu du mur opposé en marchant le long des murs, plancher ou plafond.

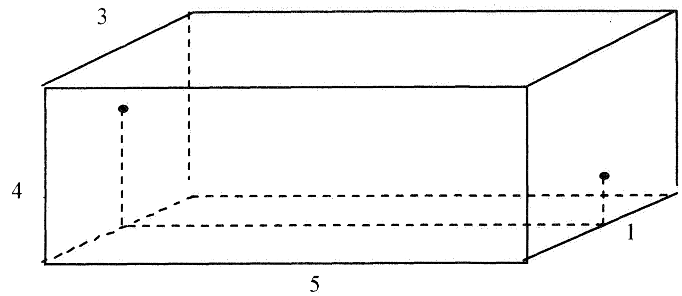

Figure 10

Il y a un itinéraire (voir figure 10) de 3 + 5 +1 = 9 mètres. L'araignée a cependant un trajet plus rapide ! Lequel ?

Solution : En dépliant la pièce on trouve un autre trajet en ligne droite de longueur $\sqrt{68}$ mètres.

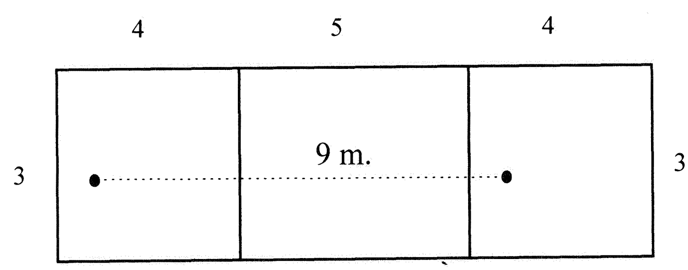

Figure 11

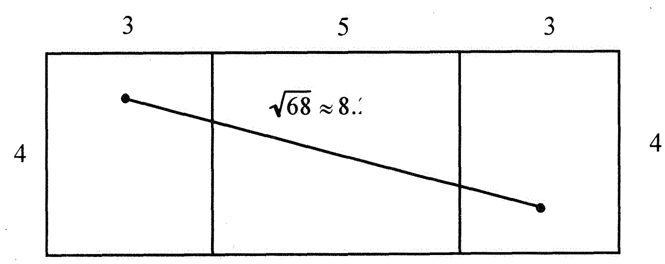

Figure 12

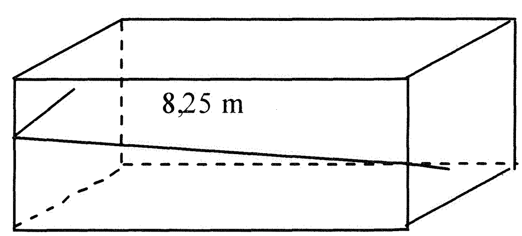

Figure 13

9) Le nombre de parties dans un tournoi par élimination

Supposons qu'on fait un tournoi par élimination entre n joueurs (à un jeu où il n'y a pas de parties nulles). Combien y aura-t-il de parties ?

1^er^ exemple : $n = 64$. 1^re^ ronde : 32 parties. 2^e^ ronde : 16 parties. Puis 8, 4, 2, 1.

Total : 63 parties.

Mais en général, cela semble se compliquer terriblement.

2^e^ exemple : $n = 77$. 1^re^ ronde : 38 parties, 38 gagnants et un bye. 2^e^ ronde : 19 parties, 20 gagnants, etc., 10, 5, 2, 1, 1.

Total : 76 parties. Oups ! C'est compliqué !

Réponse : NON, à bien y penser, ce problème est un attrape-nigaud. Chaque partie élimine un joueur ! La réponse est donc $n - 1$ parties.

10) Un attrape-nigaud

Comment placer 10 billes dans trois verres de façon que chaque verre contienne un nombre impair de billes.

Comme un nombre pair comme dix ne peut être la somme de trois nombres impairs... ça semble impossible mais pourtant (voir la figure 14).

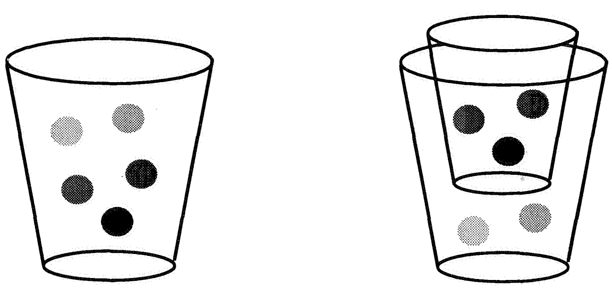

Figure 14

11) Un problème de probabilités

Il y a une urne contenant n boules blanches et m boules noires.

On pige 2 boules :

- si elles sont de même couleur, on les enlève et on replace une nouvelle boule blanche ;
- si elles sont de couleurs différentes, on les enlève et on replace une nouvelle boule noire.

Après chaque opération, il y a donc au total une boule de moins.

Question :

En fonction de n et m, trouver la probabilité p que la dernière boule, après forcément $n + m - 1$ piges, soit blanche ? (Et la probabilité $1 - p$ que la dernière boule soit plutôt noire). Ça semble très difficile.

Réponse : À bien y penser, la parité du nombre m de boules noires ne change pas.

Si au départ m est pair, il restera toujours pair et la dernière boule sera forcément blanche ;

i.e. $p = 1$.

Si au contraire m est impair, il restera toujours impair et la dernière boule sera forcément noire ;

i.e. $p = 0$.

12) Un problème de cuisson

Fred Cailloux veut faire cuire trois steaks de dinosaures sur son BBQ. Tous les veulent « medium », i.e. 3 minutes par face. Le problème est que le BBQ ne peut contenir que deux des steaks à la fois. Fred l'a fait en 12 minutes : 2 steaks d'un côté, puis les deux de l'autre ; puis le 3^e^ steak d'un côté puis de l'autre.

Pouvez-vous faire mieux ?

Réponse : Oui, 9 minutes suffisent. Steaks 1 et 2, puis steaks 2 et 3, puis steaks 1 et 3 !

13) Le merveilleux monde des statistiques sportives (voir ** à la fin)

Deux joueurs de baseball, A et B, ont participé à toutes les parties de la saison.

Le joueur A constate que systématiquement à chacune des parties, sa moyenne au bâton (i.e. nombre de coups sûrs sur nombre de présences au marbre) a été meilleure que celle du joueur B, mais que pourtant sa moyenne de la saison est inférieure à celle de B.

Y a-t-il eu une erreur, cela est-il possible ?

Réponse : Oui, c'est très possible ! Les moyennes n'étant pas sur le même nombre de présences au bâton.

Voici un exemple explicite : disons que durant la saison il y a eu 200 parties, soit 100 programmes doubles.

Dans les premières parties des programmes doubles : A a frappé 1 en 8 et B a frappé 0 en 1.

Dans les secondes parties des programmes doubles : A a frappé 1 en 2 et B a frappé 4 en 9.

À chaque partie, A a donc une meilleure moyenne au bâton. Pourtant pour la saison au total (en fait pour tout programme double), la moyenne de A est 200 (comme disent les commentateurs) et celle de B est 400, soit le double !

Conclusion

Bien sûr la mathématique est une science exacte dont l'édifice de formules et de théorèmes est en construction depuis des millénaires. Certains la considèrent donc comme une discipline aride et terne mais à vrai dire, lorsqu'on l'étudie plus en détails, on réalise la beauté du sujet. C'est une discipline vivante, pleine de surprise où l'intuition, l'imagination et les idées originales ont toujours leur place. J'espère que ces treize perles mathématiques vous ont divertis et montré qu'on peut faire des mathématiques tout en s'amusant.

* *« Il y a trois sortes de mathématiciens, ceux qui savent compter et ceux qui ne savent pas compter. »*

** *Le célèbre joueur de baseball Yogi Berra commande une énorme pizza toute garnie. Le serveur demande : « La voulez-vous coupée en 6 ou en 8 ? » Coupez-la en 6 ! Je n'ai jamais assez faim pour 8 pointes (sic) ».*

Jacques Labelle
Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal
Case postale 8888, succ. Centre-Ville
Montréal (Québec), Canada H3C 3P8
labelle.jacques@uqam.ca