Jeux et problèmes

Jean-Marie Labrie

Introduction

Chaque année, les saisons se succèdent régulièrement ; dans la vie, nous vivons également des saisons ; j'ai réalisé que j'étais rendu à l'automne de ma vie au moment où j'ai pris ma retraite le 1er septembre dernier. J'avais commencé à enseigner le 1er septembre 1954. Pour moi, cet article sera ma dernière contribution à cette chronique commencée au mois de mars 1983 à la demande de Madame Louise Trudel, présidente de l'AMQ à cette époque. Je l'écris avec un gros serrement dans la gorge mais avec autant d'enthousiasme qu'au début. J'aurai tenu cette chronique pendant 16 ans, avec plus de 60 chroniques. Si j'ai tenu, c'est grâce à vous tous, lecteurs et lectrices de cette chronique qui m'avez envoyé vos encouragements et qui avez surtout collaboré par l'envoi de solutions originales et justes, et quelquefois de nouveaux jeux et problèmes qui ont alimenté cette chronique d'un façon appréciable. Je regarde donc le passé avec fierté et reconnaissance et l'avenir avec confiance. Monsieur Jean Turgeon, en effet, prendra la relève. J'en suis heureux. Je souhaite longue vie à cette chronique et bon succès à Jean et à son équipe !

J'ai reçu, le 1er décembre 1998, de Monsieur Charles-E. Jean, un grand amateur d'activités mathématiques très connu dans l'association, un message qui m'a fait grand plaisir. Il accompagnait le tout de deux solutions aux problèmes 174 et 176 et de deux nouveaux problèmes que je veux vous proposer dans cette dernière chronique. Je le remercie de tout coeur.

1re partie : solutions aux problèmes précédents

Problème 173
Pentominos et jeu de constructions
(*Bulletin AMQ, Vol. XXXVIII, no 2, mai 1998*)

Construire, à partir de pentominos, la forme de chacun des 12 pentominos. Il s'agit, en fait, de se donner un pentomino et d'utiliser 9 autres pentominos pour le construire trois fois plus large et trois fois plus haut.

Solution proposée

Cette activité a été proposée la première fois par le professeur de mathématiques, R. M. Robinson de l'Université de Berkeley, en Californie en 1958. Notez que les solutions ne sont pas uniques. (Voir la page suivante pour les solutions).

Problème 172
Progression arithmétique et progression géométrique

Montrer qu'on peut toujours extraire d'une progression arithmétique infinie à coefficients entiers un sous-ensemble de termes formant eux-mêmes une progression géométrique infinie.

Solution proposée par Luis Lopes

Soit la progression arithmétique :

$$a_1,\ a_1+r,\ a_1+2r,\ \dots \text{ où } a_1 \text{ et } r \in Z$$

Montrons que les termes de la progression géométrique :

$$b_1,\ b_1q,\ b_1q^2,\ \dots \text{ où } q=r+1 \text{ et } b_1=a_1q$$

appartiennent à la progression arithmétique.

On peut affirmer que, pour tout $m \geq 1$, il existe un "n" tel que

$$a_{n+1}=a_1+nr=b_{m+1}=a_1(r+1)^m.$$

On peut écrire :

$$nr=a_1(r+1)^m-a_1$$

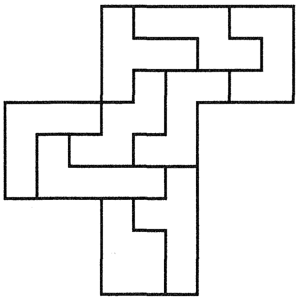
$$nr=a_1\left[r^m+\binom{m}{1}r^{m-1}+\dots+\binom{m}{m-1}r\right].$$

En divisant par "r", on peut écrire :

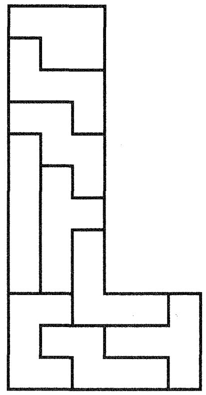
$$n=\left[r^{m-1}+\binom{m}{1}r^{m-2}+\dots+\binom{m}{m-1}\right]$$

Ce qui montre que c'est possible.

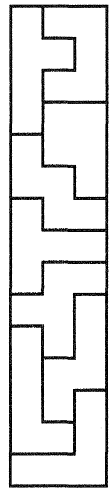
F



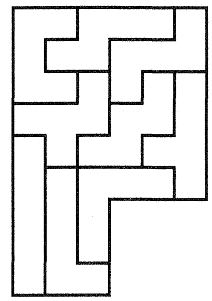
L



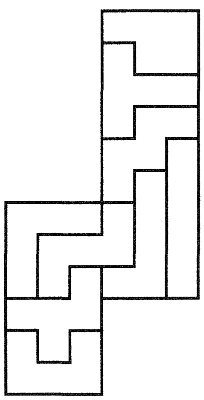
I



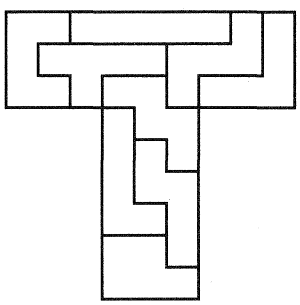
P



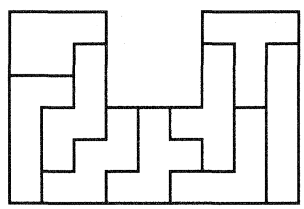
N



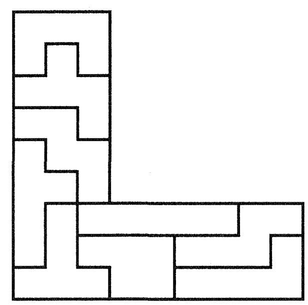
T



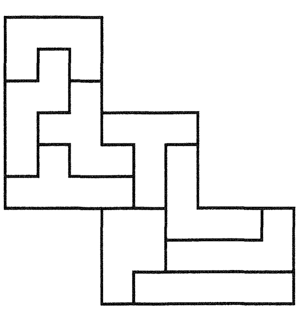
U



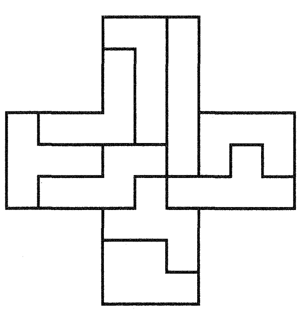
V



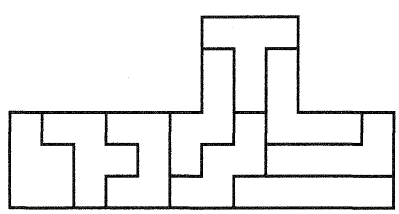
W



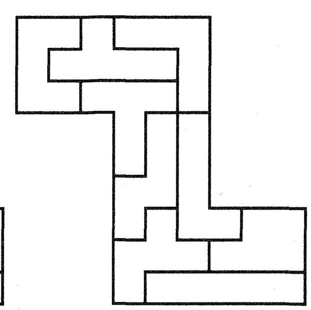
X



Y



Z



Remarques

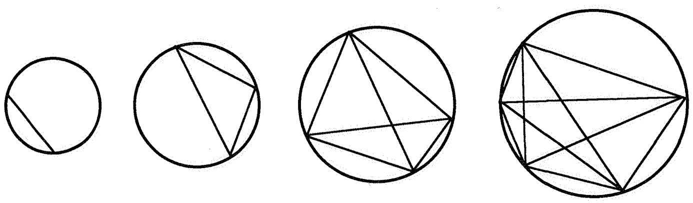
1. Dans le Bulletin AMQ, Vol. XXXVIII, n° 3, octobre 1998, p. 36 -37, Monsieur Brisebois propose également une autre solution.

2. On peut rejoindre Monsieur Lopes par E-mail : Vincent@unisys.com.br

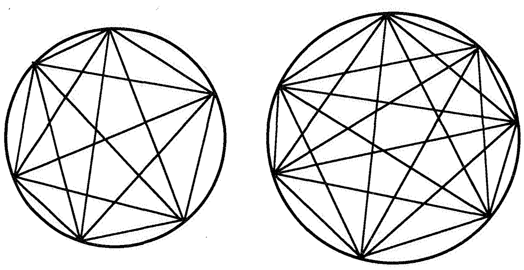
3. Il a trouvé ce problème original et intéressant et il le mettra dans la 2e édition de son livre : Manuel de Progressions.

Problème 174 (anciennement 173) Cordes au cou dans un cercle (*Bulletin AMQ, Vol. XXXVIII, n° 3, oct. 1998*)

Soit les six figures suivantes qui illustrent les régions déterminées par le cordes :



2 points 2 régions — 3 points 4 régions — 4 points 8 régions — 5 points 16 régions



6 points 31 régions — 7 points 57 régions

Définir une formule qui permet de calculer le nombre de régions d'un cercle produites par les cordes joignant les points d'un cercle.

Solution proposée par Charles E. Jean

Faisons d'abord l'hypothèse qu'aucune corde ne passe par un point d'intersection à l'intérieur du cercle. En calculant les différences successives entre les nombres de régions d'une figure à l'autre, on voit que la suite est de degré 4.

En effet, on peut écrire :

Degré :

4	2	4	8	16	31	57
3	2	4	8	15	26	
2	2	4	7	11		
1	2	3	4			
0	1	1				

La fonction $f(n)$ sera du 4e degré et elle est de la forme :
$an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$ où a, b, c, d et e sont des constantes, n est le nombre de points et $f(n)$ le nombre de régions.

Remplaçons "n" successivement par 2, 3, 4, 5 et 6 et nous aurons

$$f(2) = 2; f(3) = 4; f(4) = 8; f(5) = 16 \text{ et } f(6) = 31.$$

Nous obtenons un système d'équations linéaires à 5 inconnues.

En utilisant la méthode de réduction d'équations, nous obtenons

$$a = \frac{1}{24}$$
$$b = -\frac{1}{4}$$
$$c = \frac{23}{24}$$
$$d = -\frac{3}{4}$$
$$e = 1.$$

La fonction du 4e degré est donc :

$$\frac{(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)}{24}.$$

On peut la présenter de la façon suivante :

$$n(n-1)(n-2)\frac{(n-3)}{24} + n\frac{(n-1)}{2} + 1.$$

Cette fonction est vraie pour la suite 2, 4, 8,16, 31, 57, ... parce qu'au moins les cinq premiers termes de cette suite de degré 4 sont connus. Il n'est pas certain que le nombre de régions correspondra toujours à cette suite. Il faudrait faire un nombre suffisamment grand de tracés pour s'en assurer. Par exemple, pouvons-nous être certains qu'au 7^{e} cercle, nous compterons 99 régions ? Pour affirmer que le nombre de régions correspond à la suite, il faudrait le démontrer. J'avoue que je suis incapable de le faire dans ce cas-ci. J'invite un lecteur ou une lectrice de le faire. Merci à l'avance.

Problème 176 (anciennement 175)
Double suite

Trouver le terme général de la suite ci-dessous ne connaissant que les trois premiers termes : 27, 9, 3. La suite est-elle unique ?

Solution proposée par Charles-É. Jean

Nous voyons immédiatement une progression géométrique dont le terme général est 3^{4-n}. Mais on peut trouver des suites particulières.

Connaissant les trois premiers termes d'une suite, il est possible de trouver un terme général de degré 2. L'équation pour une telle suite est $an^2 + bn + c = m$ *où* a, b et c sont des constantes, n le rang du terme et m le terme correspondant de la suite.

Remplaçons n successivement par 1, 2 et 3 ; puis m par le nombre correspondant. Nous obtenons un système d'équations à 3 inconnues :

$$
\begin{array}{ll}
a + b + c = 2 & (1) \\
4a + 2b + c + 9 & (2) \\
9a + 3b + c + 3 & (3)
\end{array}
$$

Résolvons ce système par réduction des inconnues. Nous obtenons :

$$6n^2 - 36n + 57.$$

La suite devient 27, 9, 3, 9, 27, 57, 99, 153, 219, ...

C'est la seule solution de degré 2.

Nous pouvons trouver une infinité de solutions de degré 3.

Nous obtenons une solution de degré 3 pour chaque 4^{e} terme choisi. Par exemple, si le 4^{e} terme est 0, le terme général de la suite est :

$$\frac{(-3n^3 + 30n^2 - 105n + 132)}{2}.$$

La suite est : 27, 9, 3, 0, -9, -33, ...

Nous pouvons également trouver une infinité de solutions de degré 4 en ajoutant un 5^{e} terme à la suite 27, 9, 3, 0, par exemple.

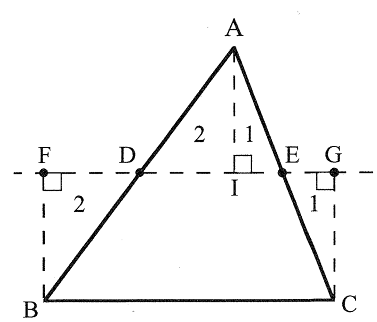
Il y a donc une infinité de solutions.

Problème 175 (Anciennement 174)
(*Bulletin AMQ, Vol. XXXVIII, n^{o} 3, oct. 1998*)

a) Transformer le triangle ABC en un rectangle.

Solution suggérée

Déterminer les points milieux des côtés AB et AB : on obtient les points D et E. On trace la droite DE. On abaisse ensuite les perpendiculaires AI, BF et CG. Il suffit de vérifier que les triangles DFB et DIA sont congrus et que les triangles ECG et EAI sont congrus. Le rectangle FBCG est le rectangle cherché.

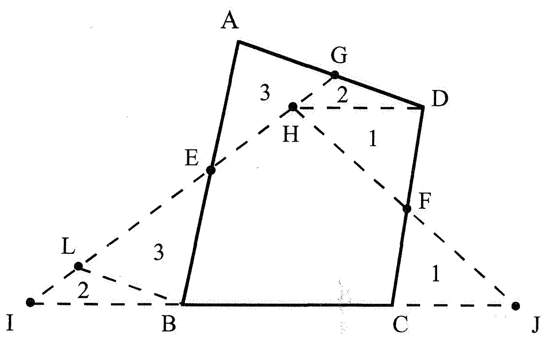


b) Transformer le quadrilatère ABCD en un triangle.

Déterminer les points milieux E, F et G des côtés respectifs AB, DC et AD. Prolonger le côté BC. Mener le segment de droite EG qu'on prolonge jusqu'au point I. Mener le segment DH de façon qu'il soit parallèle au côté BC. Prolonger le segment HF-jusqu'au point J. Mener par le point B la parallèle à la droite AD et qui rencontre la droite GI en L.

Il suffit maintenant de montrer que les trois paires de triangles suivantes sont congrues :
- Les triangles HFD et JFC
- Les triangles GEA et LEB
- Les triangles GHD et LBI.

Le triangle HIJ est le triangle cherché.

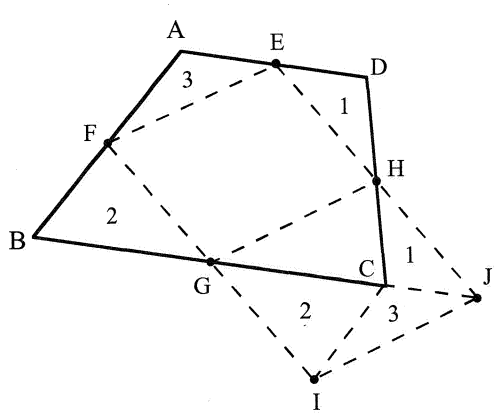


c) Transformer le trapèze ABCD en un parallélogramme.

Déterminer les points milieux respectifs des côtés AB, BC, CD et DA: F, G, H et E. Mener FE et GH Prolonger le côté BC. Prolonger le segment EH jusqu'au point J. Mener le segment IJ parallèle au segment GH. Prolonger le segment FG jusqu'au point I. Mener le segment CI.

On montre que les triangles EDH et JCH sont congrus, que les triangles BGF et BCI sont congrus et que les triangles AFE et CJI sont congrus.

Le parallélogramme EFIJ est alors le parallélogramme cherché.



2^e partie : Nouveaux jeux et problèmes

Problème 177
Une indigestion de cure-dents
(*Proposé par Charles-É. Jean*)

Une boîte contient "c" cure-dents. Vous en ajoutez trois puis vous en retranchez deux et ainsi de suite, toujours en respectant cet ordre et la nature des mouvements. Par exemple, après la première opération, il y aura $(c + 3)$ cure-dents dans la boîte ; après la deuxième, $(c + 1)$, après la troisième $(c + 4)$, après la quatrième, $(c + 2)$. Combien y aura-t-il de cure-dents dans la boîte après la n^e opération ?

Problème 178
Quels résultats !
(*Proposé par Charles-É. Jean*)

L'analyse des résultats d'un examen de mathématiques donné à 60 élèves révèle que la moyenne est de 60 %. Le maximum est de 100 points et toutes les notes sont en valeurs entières. De plus, aucun élève n'a obtenu la même note. Combien d'élèves au maximum ont obtenu un résultat 60 % et plus ? ■

Veuillez adresser toute correspondance à :

Jean Turgeon
Département de mathématiques et de statistiques
Université de Montréal
C.P. 6128, succursale Centre-ville
Montréal (Québec) H3C 3J7
Téléphone : (514) 343-7178
Courriel : turgeon@ere.umontreal.ca