Jeux et problèmes

Jean-Marie Labrie

Introduction

Dans les programmes d'études en mathématique au secondaire du MEQ, il est clairement indiqué que l'un des deux grands principes pédagogiques qui y est préconisé s'énonce, sous forme d'un objectif, de la façon suivante : *Favoriser le processus de résolution de problème à toutes les étapes d'apprentissage.*

Il est dit, entre autres, que l'enseignante ou l'enseignant utilisera alors cette méthodologie à différentes étapes d'apprentissage des connaissances. Rappelons ici brièvement qu'il existe au moins les six étapes suivantes qu'il faudrait expliciter dans un autre numéro :

1re : manipulation
2e : verbalisation avec manipulation
3e : verbalisation sans manipulation
4e : illustration
5e : schématisation
6e : symbolisation

Souvent, les activités en résolution de problèmes servent au développement d'habiletés mathématiques, soit avant pour amorcer des apprentissages, soit pendant pour exploiter davantage un concept, soit après à titre de réinvestissement.

Dans cette chronique qui dure plus de 15 ans, les activités, jeux et problèmes servent principalement à explorer, à construire, à élargir ou à approfondir des connaissances mathématiques.

Je veux d'abord remercier trois personnes qui m'ont envoyé une solution : Monsieur Jean-François Gagné pour le problème 162, Monsieur Maurice Brisebois pour les problèmes 165, 167 et 170 et Monsieur Michel Béliveau pour les problèmes 167, 169 et 170.

Solutions aux problèmes 162, 165, 167 et 170.

Problème 162 :
Un alphamétique avec trois mots importants : vivre, être et avoir
Bulletin AMQ, octobre 1997

Résoudre l'alphamétique suivant si chaque lettre correspond à un seul chiffre :

$$\begin{array}{r} \text{VIVRE} \\ +\ \underline{\text{ÊTRE}} \\ \text{AVOIR} \end{array}$$

Solution de Monsieur Gagné

Il a fait un programme pour ordinateur. Il a ainsi trouvé deux autres solutions que voici :

1re: A = 1; E = 4; I = 6; O = 3; R = 8; T = 2 et V = O
2e : A = 2; E = 8; I = 3; O = 9; R = 6; T = 7 et V = 1.

Pour les lectrices et lecteurs intéressés à connaître son programme, son adresse électronique est : gagnjea@isp.umontreal.ca

Problème 165 :
Équation sans solution !
Bulletin AMQ, octobre 1997

Montrer qu'il est impossible d'obtenir des solutions avec x et y positifs de l'équation : $7y^2 + 9 = 15x^2$.

Solution de Monsieur Brisebois

La représentation décimale (en base 10) de l'entier positif y^2 ne pouvant se terminer à droite par l'un ou l'autre des chiffres 2, 3, 7 et 8, alors la représentation décimale de l'entier $7y^2$ ne peut se terminer à droite par l'un ou l'autre des chiffres 4, 1, 9, 6 ; par conséquent, la représentation de l'entier $7y^2 + 9$ ne peut se terminer par l'un ou l'autre des chiffres 3, 0, 8, 5.

Comme la représentation décimale de l'entier $15x^2$ se termine nécessairement à droite par le chiffre 0 ou par le chiffre 5, l'équation $7y^2 + 9 = 15x^2$ ne possède donc aucune solution entière positive.

Monsieur Brisebois ajoute deux remarques didactiques :

- On peut en dire tout autant de l'équation $7y^2 + 9 = 10x^2$, par exemple. Je suggère aux lecteurs et lectrices du *Bulletin AMQ* de générer d'autres équations de cette forme en modifiant la valeur des paramètres dans l'équation $ay^2 + b = cx^2$ et en utilisant cette approche vraiment très simple. Le potentiel pédagogique de ce problème m'apparaît remarquable ; on pourrait répartir les élèves d'une classe en petites équipes dont la tâche serait de résoudre ce problème (plus ou moins complètement selon le niveau de connaissances des élèves) en donnant aux paramètres a, b et c des valeurs différentes d'une équipe à l'autre.

- Je n'ai pas, en premier lieu, utilisé l'approche élémentaire décrite précédemment. J'ai d'abord montré que x et y devaient être de parité différente afin d'obtenir des solutions entières positives ; ensuite, j'ai montré que le cas : x impair et y pair ne fournissait aucune solution. Malheureusement, mes efforts pour montrer que le cas : x pair et y impair ne fournissait aucune solution se sont avérés infructueux. C'est pourquoi, j'ai dû changer mon approche.

Note: Indirectement, Monsieur Brisebois fait appel aux lecteurs et lectrices !

Problème 167 :
Division par 8
Bulletin AMQ, décembre 1997

Un nombre naturel dont le reste de la division par 8 est 7 peut-il être la somme de trois carrés de nombres naturels ? Pourquoi ?

Solution de Monsieur Béliveau

La preuve utilise essentiellement des arguments de parité.

Le nombre naturel x utilisé est impair de la forme $8a + 7$.

Procédons par l'absurde. Supposons qu'il est la somme de trois carrés. Il y a deux cas à considérer :

1^er^ cas : Un de ces trois nombres est impair et les 2 autres sont pairs.

$$\begin{aligned} 8a + 7 &= (2b+1)^2 + (2c)^2 + (2d)^2 \\ &= 4b^2 + 4b + 1 + 4c^2 + 4d^2 \\ 8a - 4b + 6 &= 4b^2 + 4c^2 + 4d^2 \end{aligned}$$

En divisant par 2, on obtient :

$$4a - 2b + 3 = 2b^2 + 2c^2 + 2d^2$$

Ce qui est impossible :
le membre de gauche est impair et
le membre de droite est pair.

2^e^ cas : Les trois nombres sont impairs.

$$\begin{aligned} 8a+7 &= (2b+1)^2+(2c+1)^2+(2d+1)^2 \\ &= 4b^2+4b+1+4c^2+4c+1+4d^2+4d+1 \\ 8a+4 &= 4b^2+4b+4c^2+4c+4d^2+4d \end{aligned}$$

En divisant par 4, on obtient :

$$2a + 1 = b^2 + b + c^2 + c + d^2 + d$$

Ce qui est impossible :
le membre de droite est pair et
le membre de gauche est impair.

En terminant, Monsieur Béliveau fait deux remarques :

- Un corollaire est qu'un nombre de la forme $8a + 7$ ne peut être la somme de deux carrés, ni être un nombre carré ; en effet, il serait la somme de trois carrés en y ajoutant 0^2.

- Peut-il être la somme de 4 carrés, 5 carrés, etc. ? La réponse est affirmative ; par exemple, si $a = 0$, on a : $7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$.

Autre solution donnée par Monsieur Brisebois

L'essentiel de la solution que je présente peut être trouvée à la page 186 du livre *Elementary Theory of Numbers* dont l'auteur est B. M. Stewart (Macmillan, 2^e^ édition, 1964).

Si x est un entier naturel quelconque, alors on peut écrire :

$$x \equiv i \bmod 8$$

où i est l'un ou l'autre des entiers 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

On peut alors écrire :

$$x^2 \equiv 0 \text{ ou } 1 \text{ ou } 4 \bmod 8.$$

Si y et z sont deux autres entiers naturels quelconques, alors

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \bmod 8,$$

après énumération des 10 cas possibles :

1) 0 + 0 + 0	6) 0 + 4 + 4
2) 0 + 0 + 1	7) 1 + 1 + 1
3) 0 + 0 + 4	8) 1 + 1 + 4
4) 0 + 1 + 4	9) 1 + 4 + 4
5) 0 + 1 + 1	10) 4 + 4 + 4

qui fournissent, après réduction mod 8, successivement 0, 1, 4, 5, 2, 0, 3, 6, 1 et 4.

Il n'est donc jamais possible qu'un entier naturel de la forme $8m + 7$ s'écrive comme la somme des carrés de trois entiers naturels.

Monsieur Brisebois ajoute quelques remarques :

- On peut généraliser ce résultat. En fait, on peut qu'aucun entier naturel de la forme $4^k(8m + 7)$, où m et k sont des entiers non négatifs quelconques, ne peut s'écrire comme la somme des carrés de trois entiers naturels. Voir Stewart, loc. cit., p. 191, exercice 26.8, où il suggère d'utiliser une méthode de descente « à la Fermat » lorsque k est strictement positif.

  Il suggère également de consulter la présentation de Waclaw Sierpinski, *Elementay Theory of Numbers*, North Holland, 1988, p. 390-391.

  En plus de présenter une preuve du résultat général indiqué ci-haut, Sierpinski indique que Karl Friedrich Gauss (1777-1955) a été le premier à démontrer que n'importe lequel entier naturel, non de la forme $4^k(8m + 7)$ où k et m sont des entiers non négatifs quelconques, peut s'écrire comme la somme des carrés de trois entiers naturels. Il ajoute que Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859), Edmund Landau (1908-1968) et, plus récemment, N. C. Ankeny (1957), ont par la suite présenté des preuves simplifiées du résultat de Gauss.

  La preuve offerte par Sierpinski ressemble à celle suggérée par Stewart. Sierpinski considère d'abord successivement les cas :

  1^er^ : les trois entiers naturels sont impairs
  2^e^ : deux entiers sont impairs
  3^e^ : un des trois entiers est impair.

  Il montre que, dans chacun des trois cas, la somme des trois entiers naturels ne peut prendre la forme $4^k(8m + 7)$.

  La procédure qu'il utilise dans le cas où les trois entiers naturels sont pairs est différente. Il suppose, en effet, l'existence d'un ensemble non vide d'entiers naturels de cette forme qui s'écrivent comme une somme de carrés de trois entiers naturels ; en notant « n » le plus petit élément de cet ensemble, il montre qu'on peut construire un élément encore plus petit qui possède la même propriété ; en obtenant ainsi une contradiction, il conclut que l'ensemble en question est vide.

- Pour Monsieur Brisebois, il lui apparaît utile de signaler qu'en vertu d'un résultat annoncé par Pierre de Fermat (1601-1665) et démontré en 1770 par Louis de Lagrange (1736-1813), n'importe lequel entier naturel peut s'écrire comme la somme de carrés de 4 ou moins entiers naturels. Il fait remarquer que ce dernier résultat n'entre pas en contradiction avec le résultat de Gauss énoncé ci-haut. On peut trouver dans le petit ouvrage de Itard dont le titre est : *Arithmétique et théorie des nombres*, PUF, 1963, p. 41-43, une présentation de la lettre de Fermat à Pierre de Carcavi (1603-1684) dans laquelle il décrit sa méthode de descente infinie utilisée pour démontrer ce dernier résultat.

Problème 169
Neuf lettres et neuf chiffres !

Trouver au moins 10 solutions différentes de l'alphamétique suivant :

$$\begin{array}{r} \text{ABC} \\ +\ \underline{\text{DEF}} \\ \text{GHI} \end{array}$$

Solution de Monsieur Béliveau

Il y aurait environ 300 solutions. Il a écrit un programme en BASIC sur son MAC SE et il l'a laissé fonctionner pendant 48 heures. Il m'a envoyé toutes ces solutions.

Dans tous les cas, on a : G + H + I = 18. Il serait intéressant de le prouver algébriquement.

Un programme MAPLE, selon Monsieur Béliveau, donnerait plus rapidement et efficacement toutes les solutions.

En tant que responsable de cette chronique, je ne peux pas mettre ici toutes les solutions. Toutefois, il est intéressant d'en donner quelques-unes :

1) 124 + 659 = 783	11) 134 + 658 = 792
2) 125 + 739 = 864	12) 135 + 729 = 864
3) 127 + 368 = 495	13) 138 + 429 = 567
4) 127 + 359 = 486	14) 138 + 654 = 792
5) 128 + 367 = 495	15) 139 + 428 = 567
6) 128 + 439 = 567	16) 139 + 725 = 864
7) 129 + 438 = 567	17) 142 + 596 = 738
8) 129 + 654 = 783	18) 142 + 695 = 837
9) 129 + 357 = 486	19) 143 + 586 = 729
10) 129 + 735 = 864	20) 145 + 692 = 837

Problème 170

Soit $2^3 = 3^2 - 1^2$
$3^3 = 6^2 - 3^2$

Quels sont les deux carrés dont la différence est égale à 20^3 ?

Trouver une formule générale pour tout nombre entier au cube.

Solution de Monsieur Béliveau

Soit $z^3 = x^2 - y^2$ pour z entier ; cherchons les valeurs de x et de y qui vérifient cette équation.

Montrons que pour tout

$$z \neq 2$$

il existe au moins 2 solutions.

Supposons que $z^3 = \text{A} \times \text{B}$ avec $\text{A} \geq \text{B}$.

$A \times \text{B} = x^2 - y^2$ ou $(x+y)(x-y)$

Si $x + y = \text{A}$ et si $x - y = \text{B}$, on a :

$$x = \frac{\text{A}+\text{B}}{2} \text{ et } \frac{\text{A}-\text{B}}{2}$$

1) 1$^{\text{er}}$ cas : posons $z^3 = z^2 \times z$ d'où, $\text{A} = z^2$ et $\text{B} = z$.

Ce qui donne :

$$x = \frac{z^2+z}{2} \text{ et } y = \frac{z^2-z}{2}$$

Rappelons que x et y sont des entiers et z^2 et z ont la même parité. Ainsi, on a : $20^3 = 210^2 - 190^2$.

Il y a toujours au moins une autre solution.

Si z est pair, $z^3 = 2 \times \frac{z^3}{2}$; ce qui donne : $\text{A} = \frac{z^3}{2}$ et $\text{B} = 2$.

$$\text{Alors } x = \frac{\frac{z^3}{2}+2}{2} \text{ et } y = \frac{\frac{z^3}{2}-2}{2}$$

Ainsi $20^3 = 2001^2 - 1999^2$

2) Si z est impair, $z^3 = z^3 \times 1$ où $\text{A} = z^3$ et $\text{B} = 1$.

Ce qui donne : $x = \dfrac{z^3+1}{2}$ et $y = \dfrac{z^3-1}{2}$

D'où, $3^3 = 14^2 - 13^2$.

Monsieur Béliveau fait remarquer que parfois il y a d'autres solutions.

3) Si z est pair, $z^3 = 4 \times \frac{z^3}{4}$; alors $\text{A} = \frac{z^3}{4}$ et $\text{B} = 4$.

$$\text{On trouve : } x = \frac{\frac{z^3}{4}+4}{2} \text{ et } y = \frac{\frac{z^3}{4}-4}{2}$$

D'où, $20^3 = 1002^2 - 998^2$.

Passons à un 3$^{\text{e}}$ cas.

3) Si z est impair et non premier, alors $z = p \times q$ où p est premier. $z^3 = p^3 \times q^3$; ce qui donne :

$$x = \frac{p^3+q^3}{2} \text{ et } y = \frac{p^3-q^3}{2}$$

D'où, $15^3 = 5^3 \times 3^3 = 76^2 - 49^2$.

En résumé, nous avons une solution chaque fois que nous pouvons écrire : $z^3 = A \times B$ avec A et B de même parité.

Pour le cas demandé dans le problème 170, on a les 10 solutions suivantes :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
1)\ 8000 & = & 4000 & \times & 2 & = & 2001^2 & - & 1999^2 \\
2)\ 8000 & = & 2000 & \times & 4 & = & 1002^2 & - & 998^2 \\
3)\ 8000 & = & 1000 & \times & 8 & = & 504^2 & - & 496^2 \\
4)\ 8000 & = & 800 & \times & 10 & = & 405^2 & - & 395^2 \\
5)\ 8000 & = & 400 & \times & 20 & = & 210^2 & - & 190^2 \\
6)\ 8000 & = & 200 & \times & 40 & = & 120^2 & - & 80^2 \\
7)\ 8000 & = & 100 & \times & 80 & = & 90^2 & - & 10^2 \\
8)\ 8000 & = & 500 & \times & 16 & = & 258^2 & - & 242^2 \\
9)\ 8000 & = & 160 & \times & 50 & = & 105^2 & - & 55^2 \\
10)\ 8000 & = & 250 & \times & 32 & = & 141^2 & - & 109^2
\end{array}$$

Problème 170

Autre solution proposée par Monsieur Brisebois

La suite des entiers 1, 3, 6, ... dont il est fait état dans les identités indiquées dans ce problème, admet comme terme général $u(n) = n(n+1)/2$, ainsi qu'on peut le constater à partir de quelques relations additionnelles telles que : $10^2 - 6^2 = 4^3$ et $15^2 - 10^2 = 5^3$.

Le problème sera alors résolu si on peut montrer que $u^2(n) - u^2(n-1) = n^3$.
Or,

$$\begin{aligned} u^2(n) - u^2(n-1) &= (u(n) + u(n-1))(u(n) - u(n-1)) \\ &= n^2 \times n \text{ ou } n^3. \end{aligned}$$

Pour $n = 20$, on a :
$210^2 - 190^2 = 44\,100 - 36\,100 = 8000 = 20^3$.

Monsieur Brisebois ajoute une remarque intéressante. Il dit qu'on peut déduire un résultat remarquable à partir de l'identité : $u^2(n) - u^2(n-1) = n^3$. En effet, en donnant à « n » successivement les valeurs 2, 3, ..., k, en additionnant les membres de gauche et de droite de chacune de ces identités et en utilisant le fait que $1^2 = 1^3$, on obtient :

$$\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 = \sum i^3 \text{ pour } i \text{ de } 1 \text{ à } k.$$

Ce résultat connu peut être obtenu également par induction.

Nouveaux jeux et problèmes

Problème 172
(proposé par Monsieur Maurice Brisebois)

On peut vérifier, par exemple, que la progression arithmétique : 1, 4, 7, 10, 13, ... contient les éléments 16, 64, 256, ... en plus des termes 1 et 4 déjà énumérés. Montrer qu'on peut toujours extraire d'une progression arithmétique infinie à coefficients entiers un sous-ensemble de termes formant eux-mêmes une progression géométrique infinie.

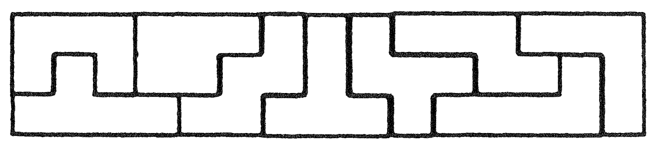
Problème 173
Pentominos et jeu de constructions!

Nous savons que chaque pentomino est formé de cinq petits carrés adjacents entre eux.

Il existe 12 pentominos.

Construire, à partir de ces 12 pentominos, la forme de chacune des pentominos.

Par exemple, le pentomino en forme de I peut ressembler à l'illustration suivante :



Veuillez adresser toute correspondance à :

Jean-Marie Labrie
870, chemin de Saint-Jean
La Prairie (Québec) J5R 2L5
Téléphone : (514) 659-1922
Télécopieur : (514) 659-2983
email : mmerefic@simm.qc.ca