Concours mathématique de l'AMQ (1998) au collégial

QUESTION 1
(Les carrés parfaits inattendus)

Démontrer que lorsque l'on ajoute 1 au produit de quatre nombres entiers consécutifs, on obtient *toujours* un carré parfait. Exemple :

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 = 25 = 5^2,\ 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1 = 361 = 19^2.$

SOLUTION PROPOSÉE

En développant et factorisant, on trouve

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= n^4+6n^3+11n^2+6n+1 \\ &= (n^2+3n+1)^2. \end{aligned}$$

On obtient donc un carré parfait si n est un entier.

<u>Note</u> : Pour trouver cette factorisation, on peut essayer $(n^2 + kn + 1)^2$ avec k indéterminé.

On trouve

$$\begin{aligned} \left(n^2+kn+1\right)^2 &= n^4+2kn^3+\left(k^2+2\right)n^2+2kn+1 \\ &= n^4+6n^3+11n^2+6n+1. \end{aligned}$$

On voit alors que $k = 3$ satisfait la condition.

On peut aussi écrire :

$n(n + 3) \cdot (n + 1)(n + 2) = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) = (x - 1)$
$(x + 1) = x^2 - 1$ avec $x = n^2 + 3n + 1$.

QUESTION 2
(L'inégalité mystérieuse)

Démontrer que pour tous nombres réels $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, l'inégalité suivante est satisfaite

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

SOLUTION PROPOSÉE

Si $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, alors

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \leq \frac{a+b+c}{3} \Leftrightarrow \frac{ab+bc+ca}{3} \leq \frac{a^2+b^2c^2+2ab+2bc+2ca}{9}$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \geq 3ab+3bc+3ca$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

Mais $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$ est toujours vraie et entraîne justement que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ par un simple développement du membre de gauche puis en divisant par 2.

QUESTION 3
(Les deux tangentes à une parabole)

Deux tangentes à une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ se rencontrent au point $(6,1)$ du plan cartésien. Sachant que les points de contact de ces tangentes avec la parabole sont $(4,3)$ et $(8,7)$, déterminer l'équation exacte de cette parabole (c.-à-d., déterminer les valeurs numériques des constantes a, b et c).

SOLUTION PROPOSÉE

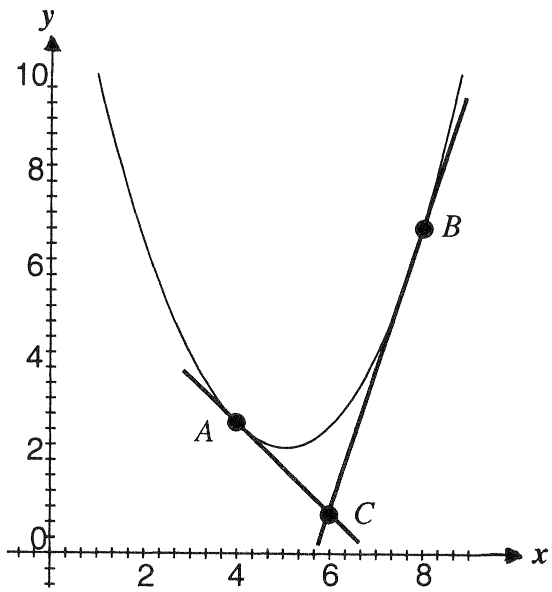
Posons $f(x) = ax^2 + bx + c$. Alors $f'(x) = 2ax + b$.
Soient $A : (4,3)$, $B : (8,7)$, $C : (6,1)$. Alors

pente de $AC = \dfrac{1-3}{6-4} = \dfrac{-2}{2} = -1 = f'(4) = 8a + b,$

pente de $CB = \dfrac{7-1}{8-6} = \dfrac{6}{2} = 3 = f'(8) = 16a + b.$

On a donc $8a + b = -1$ et $16a + b = 3$, ce qui donne : $a = \dfrac{1}{2}$, $b = -5$.

Puisque
$3 = f(4) = 16a + 4b + c = 8 - 20 + c = -12 + c$, on trouve $c = 15$. L'équation de la parabole est donc $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 5x + 15$.



QUESTION 4
(Le juge pile-ou-faciste)

Un jury est formé de trois juges. Deux de ces juges sont également compétents : chacun a une probabilité de $p > \frac{1}{2}$ de prendre la bonne décision (acquitter l'innocent ou condamner le coupable). Le troisième juge est un « pile-ou-faciste » : il acquitte ou condamne selon le lancement d'un sou. La décision finale du jury est prise à la majorité simple (2 à 1 ou 3 à 0). Quelle est la probabilité que le jury prenne la bonne décision ?

Solution proposée

Posons $q = 1 - p$. Soit D_1, D_2 et D_3 les décisions des 3 juges (le juge pile-ou-faciste est le juge 3). Chaque D_i est un succès (S) ou un échec (E). La décision globale du jury sera la bonne si
$(D_1, D_2, D_3) \in \{(S, S, S),(S, S, E),(S, E, S),(E, S, S)\}$.

Donc P (le jury prend la bonne décision) =

$$= pp\frac{1}{2} + pp\frac{1}{2} + pq\frac{1}{2} + qp\frac{1}{2}$$
$$= p^2 + pq = p(p+q) = p.$$

Le « pouvoir discriminant » du jury est donc équivalent à celui d'un seul juge compétent. Le « pile-ou-faciste » annule un juge compétent.

QUESTION 5
(Question de stratégie)

Considérons le tableau ci-dessous contenant les entiers de 1 à 100 dont certains sont soulignés. André et Bernard jouent au jeu suivant. André commence le jeu en choisissant un nombre souligné a_1 tel que $1 \le a_1 \le 10$. Bernard poursuit le jeu en choisissant un nombre souligné b_1 tel que $a_1 < b_1 + 10$. Vient le tour d'André qui doit choisir un nombre souligné a_2 tel que $b_1 < a_2 \le b_1 + 10$. Ainsi, les deux joueurs jouent à tour de rôle et chaque joueur doit choisir un nombre souligné strictement plus grand que celui choisi à l'étape précédente par son adversaire et plus petit ou égale à ce dernier nombre augmenté de 10. Le perdant est le premier joueur qui ne peut pas jouer faute de nombre approprié à choisir. Quel nombre souligné a_1 André doit-il choisir pour être assuré de gagner ? Expliquer sa stratégie.

$\underline{1}$	2	$\underline{3}$	$\underline{4}$	5	$\underline{6}$	7	8	$\underline{9}$	$\underline{10}$
11	12	13	14	$\underline{15}$	$\underline{16}$	17	18	19	20
$\underline{21}$	22	23	24	$\underline{25}$	26	27	$\underline{28}$	29	30
31	32	33	34	35	$\underline{36}$	37	38	39	40
41	42	43	44	$\underline{45}$	46	47	48	$\underline{49}$	50
51	52	53	54	$\underline{55}$	56	57	58	59	60
61	62	63	$\underline{64}$	65	$\underline{66}$	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	$\underline{78}$	79	80
$\underline{81}$	82	83	84	85	86	87	88	89	90
$\underline{91}$	92	93	94	95	96	97	98	99	$\underline{100}$

SOLUTION PROPOSÉE

Pour gagner André doit jouer 10 en premier. Voici sa stratégie.

	André	**Bernard**
1^{er} choix	10	15 ou 16
2^e choix	25	28
3^e choix	36	45
4^e choix	55	64
5^e choix	66	perdu

Explication supplémentaire :

Notons $E = \{x_1, x_2, x_3, \ldots x_{21}\}$, $x_1 < x_2 < \ldots x_{21}$, alors $\delta = x_{i+1} - x_i$ est la différence entre deux éléments consécutifs de E. On note que $\delta_{17} = 78 - 66 = 12 > 10$ et que $\delta_i \leq 10$ pour tout $1 \leq i < 17$. Donc le dernier élément de E à être choisi par un joueur sera 66 et il sera choisi par le joueur gagnant.

Si nous considérons le jeu à rebours,

	Gagnant	**Perdant**
dernier choix	66	perdu
avant dernier choix	55	64
avant avant dernier choix	36	45 ou 49
	25*	28
	10**	15, 16 ou 21

* Ici, il y a 2 coups possibles 21 ou 25. Nous devons cependant noter que le gagnant est le premier joueur à choisir 25. Sinon, si un joueur joue 21, alors l'autre joueur jouera 25 et gagnera la partie.

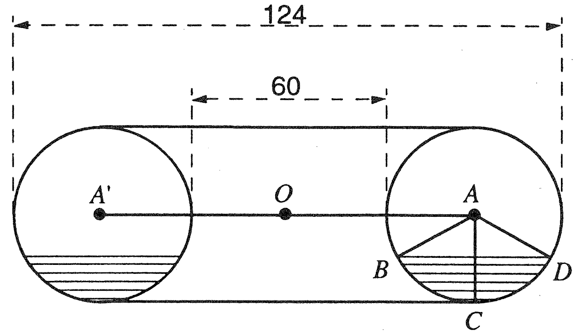
** Seul choix pour gagner.

Maintenant, on peut refaire le jeu dans le bon sens. La règle en résumé : le premier joueur à choisir 25 gagnera ; et pour qu'André gagne, il lui suffit de commencer avec 10 et de choisir ensuite 25. Pour tout autre premier coup (soit 1, 3, 4, 6 ou 9),,Bernard choisirait 10 pour alors gagner.

QUESTION 6
(La bouée de sauvetage)

Une bouée de sauvetage, ayant la forme d'un « beigne » parfait, flotte paisiblement sur l'eau calme d'un lac par un beau soir d'été. La bouée pénètre l'eau à une profondeur de 8 cm et ses diamètres intérieur et extérieur mesurent respectivement 60 cm et 124 cm. Quel est le poids de la bouée ?

SOLUTION PROPOSÉE



La figure représente une section de la bouée selon un plan vertical passant par son centre 0. Les parties hachurées représentent la portion de la bouée sous l'eau. À cause du principe d'Archimède, le poids (en grammes) de la bouée est égal au volume de révolution engendré par ces parties hachurées (en cm^3). Ce volume est égal à $2\pi.\overline{OA}$ multiplié par l'aire de la partie hachurée $BCDB$ (on le voit facilement en additionnant les volumes de révolution engendrés par des rectangles minces horizontaux en faisant tendre le nombre de ces rectangles vers l'infini). Notons qu'on a (en cm) :

$$\overline{OA} = 60/2 + (124 - 60)/4 = 30 + 16 = 46$$
$$\overline{AB} = (124 - 60)/4 = 16 \text{ et } < BAD = 2 \cdot \arccos(8/16) = \pi/3.$$

Ainsi, on a (en cm^2) :

$$\begin{aligned}\text{aire } (BCDB) &= \text{aire } (ABCDA) - \text{aire } (ABDA)\\ &= \frac{1}{3}\pi\overline{AB}^2 - 2\cdot\frac{8\sqrt{16^2 - 8^2}}{2} = \frac{256\pi}{3} - 64\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Le poids cherché de la bouée (en grammes) vaut donc

$$2\cdot\pi\cdot 46\cdot\left(\frac{256\pi}{3} - 64\sqrt{3}\right) = 5888\pi\left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right).$$

Félicitations à toutes les participantes et à tous les participants.

CONCOURS MATHÉMATIQUE DE L'AMQ (1998) GAGNANTS ET GAGNANTES NIVEAU COLLÉGIAL		
Position	**Nom de l'étudiant**	**Cégep**
1	KWOK, Felix	Collège Marianopolis
2	ENACHESCU, Mihaela Irina	Collège Dawson
3	TAO, Ye	Collège Vanier
4	CAUCHON-VOYER, Philippe	Cégep Édouard-Montpetit
5	BAI, Yu	Collège Vanier
6	MORENO, Sol	Collège Jean-de-Brébeuf
7	RADULESCU, Andrei-Dragos	Collège Vanier
8 à 10	CHARBONNEAU, Patrick	Cégep Bois-de-Boulogne
8 à 10	CHÊNEVERT, Gabriel	Cégep Bois-de-Boulogne
8 à 10	BOUCHARD, Ludovic	Collège Mérici
11	McEVOY, Mattew	Collège Marianopolis
12	MORIN, Jean-Philippe	Campus Notre-Dame de Foy
13	LEVAN, Pierre	Le Petit Séminaire de Québec
14	SHEN, Yang	Collège Marianopolis
15	UNIKOWSKY, Adam Granich	Collège Marianopolis
16 à 21	CAMPAGNOLI, Simon	Cégep de Maisonneuve
16 à 21	BELZILE, Guillaume	Cégep de Rimouski
16 à 21	SOLARI, Yannick	Cégep Édouard-Montpetit
16 à 21	BALABAN, Catalin George	Collège Dawson
16 à 21	SHUM, Kenny	Collège Marianopolis
16 à 21	KHAVKINE, Igor	Collège Vanier
22 à 25	FOSTER, William	Campus Notre-Dame de Foy
22 à 25	TRAHAN, Anik	Cégep de Sherbrooke
22 à 25	BOGDAN, Cotruta	Collège Marianopolis
22 à 25	BRUNET, Charles	Collège Mérici
26 et 27	AYOTTE, Simon	Campus Notre-Dame de Foy
26 et 27	MARION, Carl	Cégep de Sherbrooke
28 à 30	MARTIN, Jean-François	Cégep de Maisonneuve
28 à 30	AIRAPETYAN, David	Collège de la Cité (Villa Ste-Marceline)
28 à 30	PEREZ, Michael	Collège Marianopolis
31 à 33	DE LADURANTAYE, Daniel	Cégep de Baie Comeau
31 à 33	LACASSE, Patrick	Collège de Lévis-Lauzon
31 à 33	AZAR, Antoine	Collège Jean-de-Brébeuf
34 et 35	HAMEL, Jean-François	Cégep de Granby-Haute YHamaska
34 et 35	LABRE, Jean-François	Collège de Lévis-Lauzon
36 à 39	BÉRUBÉ, Sylvain	Cégep de Rimouski
36 à 39	LACOSTE, Julien	Cégep Édouard-Montpetit
36 à 39	DEMERS, Valérie	Cégep Saint-Jean-sur-Richelieu
36 à 39	BOILEAU, Jean-Christian	Collège Jean-de-Brébeuf
40 à 48	ARCHAMBAULT, François	Campus Notre-Dame de Foy
40 à 48	TURBIS, Pascal	Cégep de Baie Comeau
40 à 48	PETIT, Guillaume	Cégep de Granby-Haute Yamaska

Position	Nom de l'étudiant	Cégep
40 à 48	HATIER, Nicolas	Cégep de Rimouski
40 à 48	LAMRABET, Khalil	Cégep Saint-Laurent
40 à 48	ALBERT, Jean-Martin	Collège Jean-de-Brébeuf
40 à 48	MOSER, Dylan	Collège Marianopolis
40 à 48	NAZAROV, Alexander	Collège Marianopolis
40 à 48	PANAYOTOV, Ivo	Le Petit Séminaire de Québec
49 à 52	BEAURIVAGE, Philippe	Cégep de Sainte-Foy
49 à 52	BOUCHARD, Vincent	Cégep Saint-Jean-sur-Richelieu
49 à 52	SENGOV, Robert	Collège de la Cité (Villa Ste-Marceline)
49 à 52	WONG, Ping-Sang	Collège Marianopolis
53 à 58	DUBREUIL, Benoît	Campus Notre-Dame de Foy
53 à 58	VEILLEUX, James	Cégep Beauce-Appalaches
53 à 58	TREMPE, Christian	Cégep de Granby-Haute Yamaska
53 à 58	LEE, Karen	Collège Marianopolis
53 à 58	BEATON, Ryan	Collège régional Champlain
53 à 58	NANTEL, Gérard	Collège Vanier
59 à 61	COURCHESNE, Martin	Cégep Bois-de-Boulogne
59 à 61	CLAPROOD, Maxime	Collège André-Grasset
59 à 61	VO, Thana Phuong	Collège Dawson
62 à 65	LESSARD, Alexandre	Campus Notre-Dame de Foy
62 à 65	MARTIN, Frédéric	Cégep de Granby-Haute Yamaska
62 à 65	LANDRY, Marc-Antoine	Cégep de Sherbrooke
62 à 65	ANDREI, Octav Moise	Collège de la Cité (Villa Ste-Marceline)
66 à 72	FOURNIER, Philippe	Campus Notre-Dame de Foy
66 à 72	SOUZY, Martin	Cégep Ahuntsic
66 à 72	BERGERON, Pierre-Michel	Cégep de Granby-Haute Yamaska
66 à 72	LAROCHELLE, David	Cégep de Granby-Haute Yamaska
66 à 72	DUBOIS, Olivier	Cégep de Trois-Rivières
66 à 72	MERCURE, Stéphane	Collège de la Cité (Villa Ste-Marceline)
66 à 72	SROUR, Akram	Collège Marie de France

N'oubliez pas de contribuer à la campagne de financement des camps mathématiques.