Jeux et problèmes

Jean-Marie Labrie

Introduction

Antoine de la Garanderie, l'un des pionniers de la « gestion mentale », a la conviction que tous les élèves peuvent réussir. Sa pédagogie est basée sur l'observation fine des procédures d'apprentissage de ceux et celles qui réussissent. Cette « pédagogie de la réussite » repose sur tous les gestes affectifs et mentaux de l'apprenant. Selon Moretti, toute habileté s'appuie sur cinq aspects de la personnalité d'un individu : affectif, intellectuel, volitif, somatique et éducatif. Si l'un de ces aspects manque, la réussite est compromise. Par exemple, si nous appliquons cette conception à l'habileté à résoudre l'une des activités proposées dans cette revue, nous pourrions faire appel aux actions suivantes : aimer l'activité, se rappeler les connaissances acquises sur le sujet, persévérer malgré les difficultés, écrire les raisonnements, dessiner des figures, ordonner les étapes. Ainsi, nous pouvons observer que les cinq aspects sont présents et normalement l'activité choisie devrait être réussie. Rappelons que chaque élève a son approche appropriée et efficace qui est son mode dominant d'apprentissage. Nous savons que les enseignantes et enseignants sont à l'affût de ce mode d'apprentissage afin que leur enseignement soit au centre de l'élève.

Dans ce numéro, nous revenons sur deux problèmes: 157 et 161. Des solutions sont suggérées pour les problèmes 164 et 166. Finalement, nous proposons trois nouveaux jeux et problèmes : 167, 168 et 169.

Problème 157 :
Carré inscrit dans un triangle rectangle !
Bulletin AMQ, déc. 1996, p. 38

Solution suggérée par Norbert Verdier :

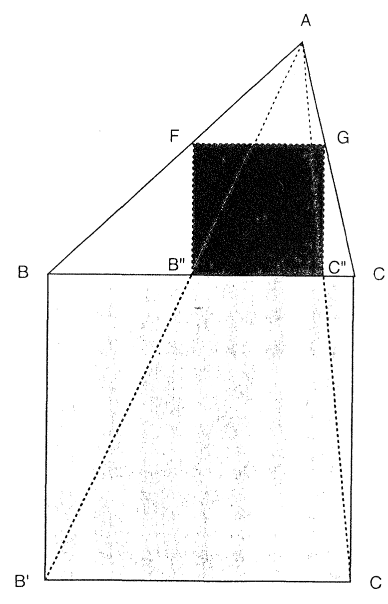
Monsieur Verdier, dans la revue *Tangente*, numéros 51 et 52, p. 90-91, donne deux façons d'inscrire un carré dans un triangle quelconque. Il est facile d'appliquer ces méthodes pour un triangle rectangle.

1re méthode :

1) Construire d'abord un carré sur le plus grand côté BC (voir la fig. 1 ci-dessous).
2) Construire ensuite, par l'homothétie de centre A, le carré demandé.

La preuve repose sur le théorème de Thalès.

Fig. 1



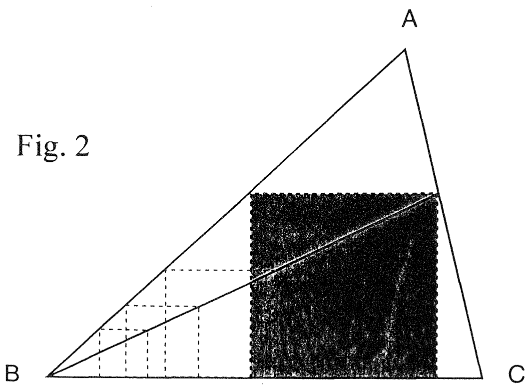
2^{e} méthode :

1) Construire un carré avec deux conditions assurées :
   a. deux sommets du carré sur le côté BC du triangle ABC.
   b. un 3^{e} sommet du carré sur le côté BA du triangle ABC.

2) Pour trouver le 4^e sommet du carré sur le côté AC, il suffit de tracer quelques-uns de ces carrés. On constate, en effet, que le 4^e sommet du carré se déplace sur une ligne droite.

La preuve repose également sur le théorème de Thalès. Les homothéties, définies ici, ont pour centre le point B. Voir la figure 2 ci-dessous.

Fig. 2



Problème 161 :
Dénombrement de demi-droites !
Bulletin AMQ, mars 1997

La solution proposée dans le Bulletin AMQ, mai 1997, p. 46-47 contient, hélas, une erreur de comptage. Ce qui change les réponses. L'auteur de cette chronique s'excuse et remercie Maurice Brisebois de l'avoir détectée et surtout de suggérer une bonne solution que voici.

Solution proposée par M. Brisebois :

Soit la suite des figures 1, 2, 3 et 4 :

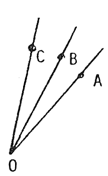


Fig. 1

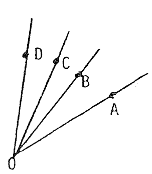


Fig. 2

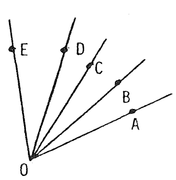


Fig. 3

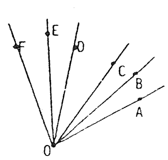


Fig. 4

La solution donnée en pages 46 et 47 dans le numéro de mai du Bulletin AMQ me semble inexacte. Par exemple, la liste des paires d'angles adjacents possibles dans le cas où le nombre de demi-droites vaut 5 (Voir fig. 3), est incomplète. On doit ajouter les paires suivantes :

les angles AOC et COD
les angles AOC et COE
les angles AOD et DOE
les angles BOD et DOE

Ce qui donne 10 paires au lieu de 6 paires. Etc. pour les autres situations.

Je soumets donc une solution à ce problème.

1. Je vais considérer le cas général où l'on dispose d'un nombre n quelconque d'angles. Je numérote de façon ascendante les angles dans le sens des aiguilles d'une montre et je note
$(i, i+1, ..., i+r, i+r+1, i+r+2, ..., i+r+s)$
la paire formée par les deux angles suivants : l'angle formé par la réunion des angles
$$i, i+1, ..., i+r$$
et l'angle formé par la réunion des angles
$$i+r+1, i+r+2, ..., i+r+s \text{ où } i, r \text{ et } s$$
sont des entiers non négatifs avec $i+r+s \leq n$. Je donne ci-après la liste de toutes les paires possibles d'angles adjacents à partir de l'angle 1 :

$(1;2)$; $(1; 2,3)$; $(1; 2,3,4)$; ...; $(1;2,3,4,...,n)$

$(1,2;3)$; $(1,2;3,4)$; $(1,2;3,4,5)$; ...; $(1,2;3,4,5,...,n)$

...

$(1,2,3,...,n-1; n)$

Le nombre total des paires d'angles adjacents ainsi formées est donc $(n-1)+(n-2)+(n-3)+...+1$, c'est-à-dire $n(n-1)/2$ qui peut être écrit dans la forme $C(n, 2)$ indiquant le nombre de combinaisons de n objets distincts pris deux à deux.

En excluant successivement l'angle 1, les angles 1, 2, ..., les angles 1,2,3, ..., $(n-2)$, on obtient alors respectivement $C(n-1, 2)$, $C(n-2, 2)$, ..., 1 paires d'angles adjacents. Le nombre total de paires d'angles adjacents formées à partir des n angles donnés est donc égal au nombre
$$C(n, 2) + C(n-1, 2) + ... + 1.$$

2. On peut donner à ce nombre une forme fermée en utilisant un cas particulier d'une identité en 12.6 indiquée (sans démonstration) à la page 63 du livre de William Feller : An Introduction to Probability Theory and its Applications (John Wiley, 2^e édition, 1968). Feller propose, dans cet exercice, d'utiliser l'identité (#) suivante :

$C(x, r) + C(x, r-1) = C(x+1, r)$ où x est un réel et r un entier naturel, afin de montrer que, pour n et r entiers non négatifs et pour tout réel a, on a :

$$\sum_{v=0}^{n} C(a-v, r) = C(a+1, r+1) - C(a-n, r+1) \quad (\#)$$

Il ajoute que le cas : $a = n$ est fréquemment utilisé. Si l'on pose $a = n$ et $r = 2$, alors $C(0, r+1) = 0$ et cette identité se réduit à l'identité suivante :

$$C(n, 2) + C(n-1, 2) + \ldots + C(2, 2) = C(n+1, 3) \quad (*)$$

qui nous donne directement la solution du problème.

La démonstration de l'identité (*) est immédiate. Or l'identité (#) nous permettant d'écrire :

$$\begin{aligned} C(n, 2) + C(n, 3) &= C(n+1, 3) \\ C(n-1, 2) + C(n-1), 3) &= C(n, 3) \\ &\ldots \\ C(3, 2) + (3, 3) &= C(4, 3), \end{aligned}$$

l'identité (*) désirée est obtenue en égalant la somme des membres de gauche à la somme des membres de droite, après avoir procédé aux annulations des termes communs dans les deux membres de l'égalité et en utilisant le fait que $C(3, 3) = C(2, 2)$.

Remarque didactique

L'expression $C(n+1, 3)$ est un polynôme de degré 3 en la variable n. Si l'on choisissait la voie utilisée dans la solution proposée et qu'on constituait le tableau des différences finies comme l'a fait l'auteur de la solution proposée, on constaterait que les différences finies d'ordre 3 sont constantes, dans la mesure où les calculs effectués seraient exacts.

Lorsque l'on dispose de 5 demi-droites, c'est-à-dire lorsque $n = 4$, on obtient $C(5, 3) = 10$ (et non pas 6) paires d'angles adjacents formées à partir de 4 angles. En utilisant la notation de la solution proposée, on peut voir que les paires (AOC, COD), (AOC, COE), (BOD, DOE) et (AOD, DOE) ne figurent pas dans la liste proposée et qu'il n'est pas possible d'en construire d'autres. Lorsque l'on dispose de 20 demi-droites, on a $n = 19$ et on obtient ainsi $C(20, 3) = 1140$ paires.

Autres remarques didactiques

1. Il m'apparaît intéressant sur le plan pédagogique d'utiliser l'identité (*) afin de construire le triangle de Pascal. Écrivons, par exemple, les premières rangées du triangle de Pascal de la façon suivante :

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

   Si on connaît, par ailleurs, les éléments de la sixième rangée du triangle de Pascal, on peut constater que la somme des éléments dans une colonne donnée de ce triangle de Pascal fournit la valeur de l'élément de la colonne suivante de la septième rangée : la somme 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 donne 6 ; la somme 1 + 2 + 3 + 3 + 5 donne 15 ; la somme 1 + 3 + 6 + 10 donne 20 ; la somme 1 + 4 + 10 donne 15 ; la somme 1 + 5 donne 6. Ce qui donne effectivement les coefficients binomiaux successifs dans le développement de l'expression de $(a+b)^6$, mis à part les premier et dernier coefficients qui valent 1 chacun. Je note enfin que la présente reconstitution du triangle de Pascal est faite à partir de l'identité (#) tout comme la reconstitution habituellement utilisée dans les démonstrations.

2. Je suggère aux lecteurs et lectrices intéressés de compléter la liste des paires possibles dans le cas où n prend de petites valeurs ; la tâche, en effet, de vérification s'avère difficile dans le cas où n est relativement grand.

3. Une dernière remarque : bien que l'utilisation des différences finies constitue une approche intéressante, une argumentation de type combinatoire me semble, à mon avis, plus à propos, car plus « élégante » et plus rigoureuse.

Problème 164 :
Encore le carré magique d'ordre 3

Si on élève au cube chacun des termes du carré magique d'ordre 3 (voir l'illustration ci-dessous :

8	1	6
3	5	7
4	9	2

on obtient un nouveau carré (non magique) dans lequel on peut découvrir plusieurs propriétés remarquables. Citez-en au moins trois.

Solution suggérée :

Soit le nouveau carré d'ordre 3 dont tous les nombres sont des cubes :

512	1	216
27	125	343
64	729	8

Voici quelques propriétés :

1) La somme de tous les 9 cubes est un nombre carré : 2025 ou 45^2.

2) Les deux diagonales sont deux multiples de 5 : 645 et 405.

3) La somme des quatre coins est 800 :

$$\begin{aligned} 800 &= 20^2 + 20^2 \\ &= 900 - 100 \text{ ou } 30^2 - 10^2 \\ &= 32 \times 25 \text{ ou } 2^5 \times 5^2 \text{ (symétrie des nombres)} \\ &= 8 \times 100 \text{ ou } 2^3 \times 10^2. \end{aligned}$$

4) La somme de la 1^re^ rangée et de la 1^re^ colonne est 1332, multiple de 36 et multiple de 37 ; ce qui donne le double du 36^e^ nombre triangulaire.

5) La somme de la 2^e^ rangée et de la 2^e^ colonne est 1350, multiple de 15 et de 25 et surtout 50 de plus que le double du 25^e^ nombre triangulaire 650 ou 25×26.

6) La somme de la 3^e^ rangée et de la 3^e^ colonne est 1368, multiple de 8 et de 171 ; ce qui donne 8 fois le 18^e^ nombre triangulaire qui est 171.

7) Les trois sommes précédentes : 1332, 1350 et 1368 forment une progression arithmétique dont la raison est 18.

8) Le nombre 1350 s'exprime d'une façon symétrique comme suit :

$$1350 = 2 \times 25^2 + 2^2 \times 25.$$

9) La somme des cinq cubes qui forment la croix en X dans le carré est 925 :

$$\begin{aligned} 925 &= 900 + 25 \text{ ou } 30^2 + 5^2 \\ &= 25 \times 37 \text{ (multiple de 37)} \\ &= 5^2 \times (1 + 2^2 \times 3^2). \end{aligned}$$

10) Le nombre 1368 est de la forme $n(n + 2)$ quand n est pair.

11) Le nombre 1350 est de la forme $2n(n + 2)$.

12) Le nombre 1332 est de la forme $n(n + 1)$.

13) La différence entre les 9 cubes et les quatre nombres des coins est un nombre carré : 2025 − 800 ou 1225 ou 35^2. Ce sont les nombres formant la croix (+).

14) La somme des cubes de chaque rangée et de chaque colonne est un multiple de 9.

15) En groupant les cubes par 2, on obtient les sommes suivantes : 280, 370, 520 et 730 et sont exprimées sous la forme $30n^2 + 250$.

Problème 166 :
Petit test pour les élèves de 3^e^ secondaire !

a. Quelle est la racine carrée négative de 0,0009 ?

Solution : − 0,03.

b. Résoudre l'équation suivante : $\frac{2}{15} = \frac{1}{8} + \frac{1}{x}$

Solution : $x = 120$.

c. Marie-Andrée a eu 68% comme moyenne générale pour ses 10 premiers devoirs en mathématiques. Si elle veut augmenter de 2% sa moyenne générale après son prochain devoir, quelle note devra-t-elle avoir pour ce 11^e^ devoir ?

Solution :

1) Pour ses 10 premiers devoirs, le total de ses notes est 680.

2) Pour ses 11 devoirs, elle devra avoir en tout 11×70 ou 770.

3) Entre le 11^{e} devoir et le 10^{e} devoir, il y a donc une différence de 90. Elle devra obtenir au moins 90%.

Nouveaux jeux et problèmes

Problème 167 : Division par 8

Un nombre naturel dont le reste de la division par 8 est 7 peut-il être la somme de trois carrés de nombres naturels ? Pourquoi ?

Problème 168 : Partage d'un rectangle !

Partager un rectangle

a. en quatre triangles rectangles semblables

b. en cinq triangles rectangles semblables

c. en six triangles rectangles semblables.

Problème 169 : Neuf lettres et neuf chiffres !

Trouver au moins 10 solutions différentes de l'alphamétique suivant :

ABC + DEF = GHI où chaque lettre correspond à un seul nombre de 1 à 9.

Veuillez adresser toute correspondance à :
Jean-Marie Labrie
Faculté d'éducation (DEPP)
Université de Sherbrooke
Sherbrooke (Québec) J1K 2R1
Télécopieur : (819) 821-8048