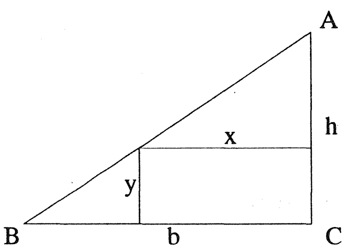
Jeux et problèmes

Jean-Marie Labrie

En méthodologie de la résolution de problèmes, il se passe souvent en classe des situations inédites et toujours passionnantes. Voici une anecdote que Madame Lise Saint-Pierre m'avait racontée en mars 1990 et que j'avais gardée en réserve: «*Dialogue autour d'un problème d'optimisation*».

Au Cégep, dans le cours «Calcul différentiel et intégral I», on demande aux élèves de résoudre des problèmes du type suivant:

«*Trouver les dimensions du rectangle d'aire maximale qu'on peut inscrire dans un triangle rectangle dont la base est b et la hauteur h.*» (Voir figure)



Bien sûr, on trouve rapidement la réponse à partir de la notion de dérivée: on doit avoir $x = b/2$ et $y = h/2$.

Or, pendant le cours, il s'est passé le dialogue suivant: E (pour élève) et P (professeure).

E: On n'a pas besoin de la dérivée pour faire ça!

P: Ah! oui.

E: Si $x/y = b/h$, l'aire sera maximale et c'est fini.

P: Un instant! Pourquoi l'aire est-elle maximale quand $x/y = b/h$?

E: Ben, ça se voit; voyons!

P: Ben; je ne vois rien. Explique-le ou prouve-le.

E: Euh!

Le lendemain

E: Voilà! Si l'aire est maximale, alors $x = b/2$ et $y = h/2$; donc, $x/y = (b/2) \div (h/2)$; d'où, $x/y = b/h$.

P: Tu nous montres que si l'aire est maximale, alors on a $x/y = b/h$. Mais la question était de montrer que si $x/y = b/h$, alors l'aire est maximale.

E: Euh!

Deux semaines plus tard

E: Je n'arrive à rien! Comment fait-on cela?

P: Euh!

Soit un rectangle de dimensions x et y inscrit dans un triangle rectangle de base b et de hauteur h. (voir la figure).

a) Montrer que si $x/y = b/h$, alors l'aire du rectangle inscrit est maximale.

b) Montrer que si $x/y = b/h$, alors $x = b/2$ et $y = h/2$.

Les deux énoncés sont équivalents puisqu'on peut montrer l'énoncé suivant:

«*L'aire du rectangle inscrit est maximale si et seulement si $x = b/2$ et $y = h/2$.*»

Je remercie Madame St-Pierre de laisser cette activité à tous nos lecteurs et lectrices.

1. Solutions suggérées pour les problèmes 143 (Décembre 1995), 146, 147, 148, 149 et 150 (Mars 1996)

Problème 143 : Un alphamétique remarquable!

Sachant que chaque lettre correspond à un seul chiffre hindo-arabe, déterminer trois nombres multiples de 13 de façon qu'on ait la somme suivante:

```
   DEUX
 + CINQ
 + CINQ
 ------
  DOUZE
```

Solution suggérée par Pascal Gagné, étudiant au BES de l'Université de Sherbrooke

À partir d'un programme sur l'ordinateur, Pascal a trouvé 18 solutions que voici:

	D	E	U	X	C	I	N	Q	O	Z
1	2	0	5	4	9	7	6	3	1	8
2	1	0	6	4	8	2	9	3	7	5
3	1	5	0	9	6	2	8	3	4	7
4	1	8	9	0	7	5	2	4	6	3
5	2	8	5	0	9	3	6	4	1	7
6	2	5	3	7	8	9	1	4	0	6
7	1	2	9	0	7	3	4	6	5	8
8	2	5	8	3	9	1	4	6	0	7
9	2	4	6	0	9	5	8	7	1	3
10	2	6	7	0	9	5	3	8	1	4
11	1	9	5	3	6	2	7	8	4	0
12	1	0	3	4	5	6	7	8	2	9
13	1	2	3	6	4	5	7	8	0	9
14	1	8	3	0	6	7	4	9	5	2
15	1	8	3	0	7	2	5	9	6	4
16	1	0	7	2	6	8	3	9	4	5
17	1	6	7	8	4	5	2	9	0	3
18	1	6	3	8	5	3	7	9	2	0

Seule la première solution donne des multiples de 13:
2054 pour DEUX, car $2054 = 13 \times 148$
9763 pour CINQ, car $9763 = 13 \times 751$
21 580 pour DOUZE, car $21580 = 13 \times 1660$

Problème 146 : Trois entiers naturels consécutifs (C.-É. Jean)

En utilisant trois entiers naturels consécutifs supérieurs à 4, chacun pris une et une seule fois, et en appliquant au choix deux des quatre opérations fondamentales (+, -, ×, ÷), combien d'entiers naturels différents peut-on représenter? En dresser une liste complète.

Solution suggérée par l'auteur

Soit a, b et c trois entiers naturels consécutifs.

On peut écrire les 17 solutions suivantes qu'on a représentées en fonction de b.

Les nombres entre parenthèses sont les solutions quand $a = 10$, $b = 11$ et $c = 12$.

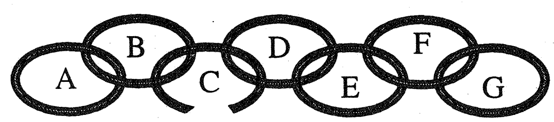
1)	$(a+c)b$	ou	2	(2)
2)	$(a+b)-c$	ou	$b-2$	(9)
3)	$(c-b)a$	ou	$b-1$	(10)
4)	$a-b+c$	ou	b	(11)
5)	$(b-a)c$	ou	$b+1$	(12)
6)	$b+c-a$	ou	$b+2$	(13)
7)	$(c-a)b$	ou	$2b$	(22)
8)	$a+b+c$	ou	$3b$	(33)
9)	$ab-c$	ou	b^2-2b-1	(98)
10)	$ac-b$	ou	b^2-b-1	(109)
11)	$ab+c$	ou	b^2+1	(122)
12)	$ac+b$	ou	b^2+b+1	(131)
13)	$bc+a$	ou	b^2+2b-1	(142)
14)	$(c+b)a$	ou	$2b^2-b-1$	(230)
15)	$(a+c)b$	ou	$2b^2$	(242)
16)	$(a+b)c$	ou	$2b^2+b-1$	(252)
17)	abc	ou	b^3-b	(1320)

Problème 147 : Les chaînons (C.-É. Jean)

Andrée a sectionné le 3^e maillon d'une chaîne de 7.

Elle peut ainsi obtenir successivement 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7 maillons.

En voici l'illustration:



1 maillon:	C
2 maillons:	A et B
3 maillons:	A, B et C
4 maillons:	de D à G
5 maillons:	de C à G
6 maillons:	tous sauf C
7 maillons:	tous

Trouver le nombre maximum m devant former une chaîne dont cinq maillons sont sectionnés pour obtenir successivement de 1 à m maillons.

Solution suggérée par l'auteur

Comme on a déjà cinq maillons, on a besoin d'un chaînon de six maillons.

On peut ainsi obtenir jusqu'à 11 maillons par assemblage en utilisant les cinq maillons uniques. Par conséquent, on a besoin d'un chaînon complet de 12 maillons; ce qui permet de produire jusqu'à 23 maillons.

Par la suite, on a besoin successivement de chaînons complets de 24, 48, 96 et 192 maillons. Ce qui donne u total 383 maillons. La place des maillons complets ›ctionnés est telle qu'indiquée ci-dessous:

5 maillons), 1 maillon sectionné, (12 maillons), maillon sectionné, (24 maillons), 1 maillons sec- onné, (48 maillons), 1 maillon sectionné, (96 mail- ›ns), 1 maillon sectionné, (192 maillons).

›roblème 148 : Une équation (C.-É. Jean)

oit x, y, z des entiers naturels. Trouver une ou des ›rmules qui vont permettre de résoudre l'équation $^2 - xy + y^2 = z^3$.

'olution suggérée par l'auteur

'oici trois formules qui permettent de trouver des so- ıtions différentes.

) Formule 1

oit $a = ac$ et $y = bc$ où a, b et c sont des entiers ıaturels.

ılors, on peut écrire:

$$\begin{aligned} a^2c^2 - abc^2 + b^2c^2 &= z^3 \\ c^2(a^2 - ab + b^2) &= z^3 \end{aligned}$$

ìi $c = a^2 - ab + b^2$, on peut écrire: $c^3 = x^3$.

)'où $c = z$ et z est bel et bien un entier naturel.

ıpplication: $a = 5$ et $b = 2$, alors $c = 19$. d'où, $x = 95$, $= 38$ et $z = 19$.

) Formule 2

ìoit $x = 3ab(a - b)$ et $y = a^3 - 3ab^2 + b^3$ où $a < b$ lans l'équation initiale.

)n peut vérifier que $(a^2 - ab + b^2)^3 = z^3$.

)'où, $z = a^2 - ab + b^2$ qui est bien un entier naturel.

ıpplication: $a = 5$ et $b = 2$. Alors $x = 90$, $y = 73$ et $= 19$.

) Formule 3

'osons $x = pt^3$ et $y = qt^3$ où p et q sont respective- nent des solutions de x et de y obtenues à partir de 'une ou l'autre des deux formules précédentes et t est ın entier.

Nous obtenons $p^2t^6 - pqt^6 + q^2t^6 = z^3$ ou bien $t^6(p^2 - \mathrm{\imath}q + q^2) = z^3$.

Comme p et q sont des solutions de l'équation, $(p^2 - pq + q^2)$ est un cube entier.

Si nous posons $r^3 = p^2 - pq + q^2$, alors $z = rt^2$.

Application: $t = 2$, $p = 90$, $q = 73$ et $r = 19$. d'où, $x = 720$, $y = 584$ et $z = 76$.

N.B. L'auteur croit que ces trois formules permettent de trouver toutes les solutions de l'équation, mais il ne peut pas le démontrer. Il fait appel à tous les lecteurs et lectrices.

Problème 149 : Un alphamétique (M. Dufour)

Résoudre l'alphamétique suivant en sachant que la lettre O correspond à 3:

$$BIZARRE \times O = ETRANGE.$$

Solution suggérée:

1. $E \neq 0$, sinon tout est zéro.
2. $E = 5$, car $E \times 3 = E$.
3. $B = 1$, car $B \times 3 = 3$; d'où B plus la retenue 2, on obtient E. Etc.

A	B	E	G	I	N	O	R	T	Z
0	1	5	7	p	6	3	2	8	4

N.B. La solution est-elle unique?

Problème 150 : *La fameuse suite de Fibonacci!*

Soit la suite de Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

Si f_n représente le nombre de Fibonacci de rang n, trouver une expression simple dans chacun des cas suivants:

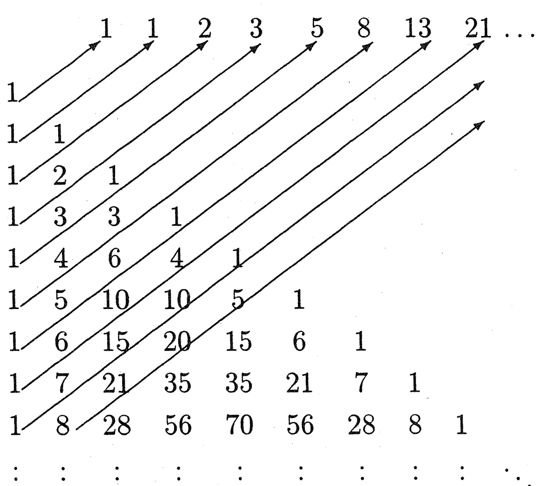
1. (a) ${f_1}^2 + {f_2}^2 + \ldots + {f_n}^2$
   (b) $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$
   (c) $f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n}$
   (d) $f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n+1}$
2. Montrer que la somme de dix nombres consécutifs de la suite de Fibonacci est égale au produit du 7e nombre de cette suite et de 11.
3. Où sont situés les nombres de la suite de Fibonacci dans le triangle de Pascal?

Solution suggérée

1. (a) $f_n \times f_{n+1}$
   (b) $f_{n+2} - 1$
   (c) $f_{2n+1} - 1$
   (d) f_{2n}
2. Exemple: la somme des dix premiers termes est exprimée par $f_{12} - 1$: 144 est le 12$^{\mathrm{e}}$ terme; d'où, $144 - 1 = 143$ ou 11×13.
   Voici quelques sommes:
   143 ou 11×13; 231 ou 11×21;
   374 ou 11×34; 605 ou 11×55;
   979 ou 11×89; etc.
3. Si l'on place le triangle de Pascal de la façon suivante:

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

on trouve la suite de Fibonacci en effectuant l'addition de tous les nombres sur la ligne en pointillé.

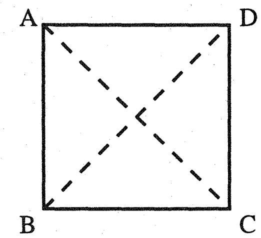


2. Nouveaux jeux et problèmes

Problème 151 : Quatre points distincts!

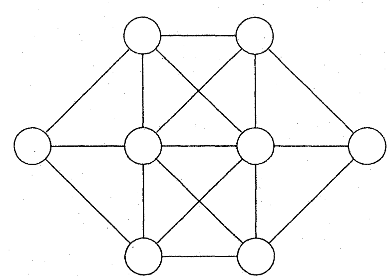
Soit quatre points distincts dans le plan. À l'aide de deux mesures de longueur différentes, construire six figures différentes. Tous les quatre points sont reliés deux à deux par ces deux types de segments de droite. Voici l'un des six cas possibles, le carré $ABCD$:

1. $AB \cong BC \cong CD \cong DA$
2. $BD \cong AC$



Problème 152 : Huit nombres à répartir!

Placer les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 dans les petits cercles de la figure 2. de telle sorte que deux nombres consécutifs ne soient pas «adjacents» sur la figure, c'est-à-dire qu'ils ne soient pas inscrits dans deux cercles reliés par un segment de droite.



Problème 153 : Qui suis-je?

Dans les trois suites horizontales de nombres, il existe une même logique. Quel est le nombre manquant?

24	15	27
13	23	19
18	43	?

Problème 154 : Quel est l'intrus?

1. 286, 381, 735, 842 et 579
2. 51, 91, 141, 201 et 271

Problème 155 : *Multiples de six!*

Montrer que $n^3 + 11n - 6$ est le terme général d'une suite de multiples de six.

Veuillez adresser toute correspondance à :
Jean-Marie Labrie
870, chemin de Saint-Jean
La Prairie (Québec) J5R 2L5
Télécopieur: (514) 659-2983